

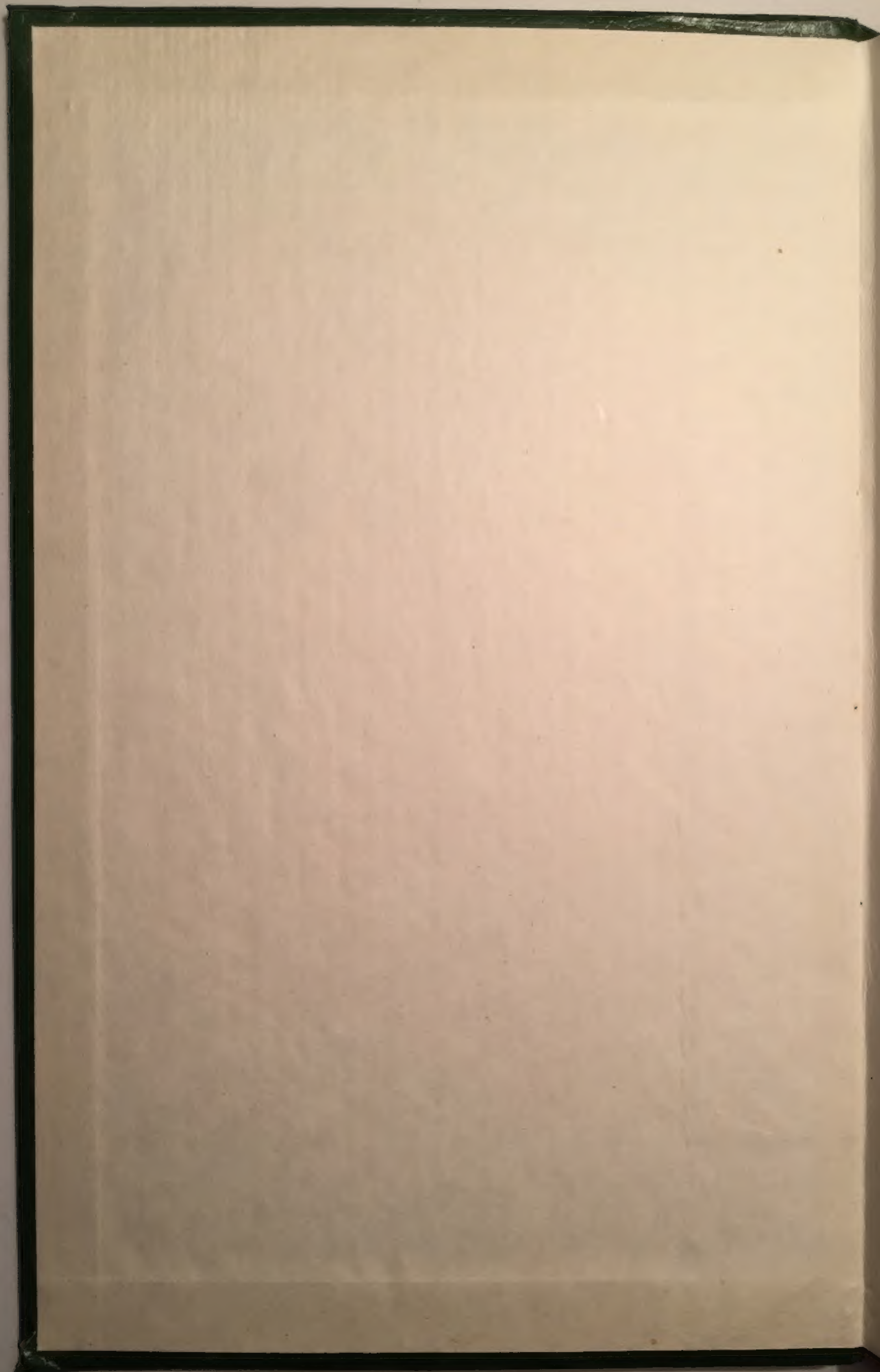
**П. М. ЭРДНИЕВ**

**ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ  
В НАЧАЛЬНЫХ КЛАССАХ**

**КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ**

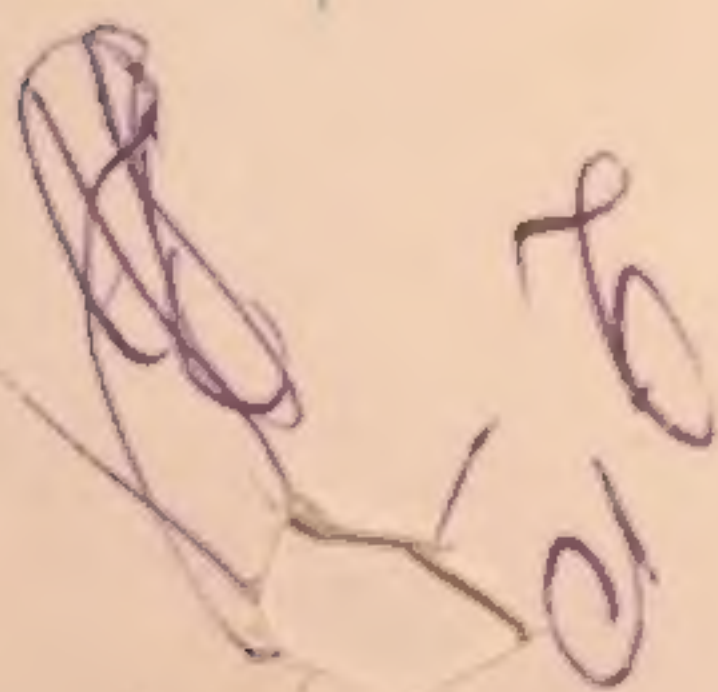
**«СТОЛЕТИЕ»**







ФЕБ Чулочный комбинат  
"Эзда"  
ФЕБ Чулочная фабрика  
"Макс Рошер" Горнай

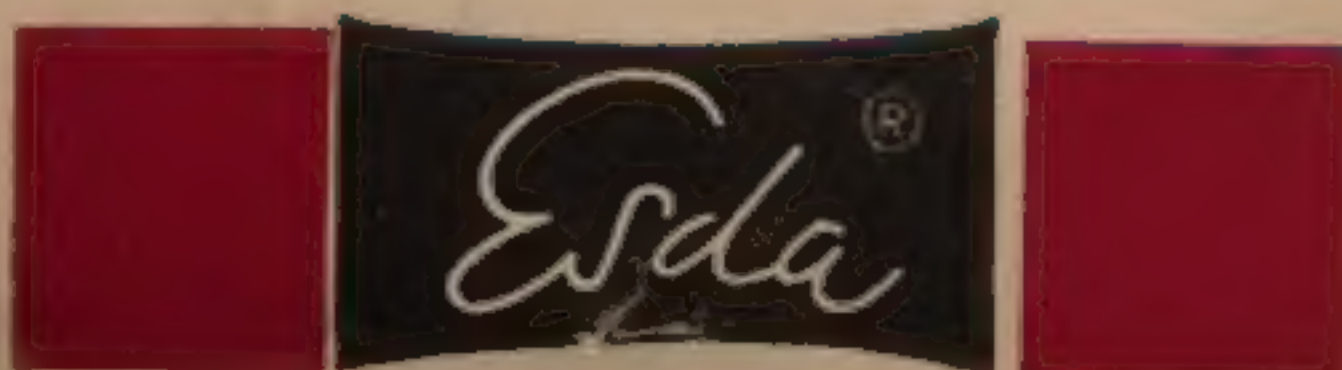


264 604 V00

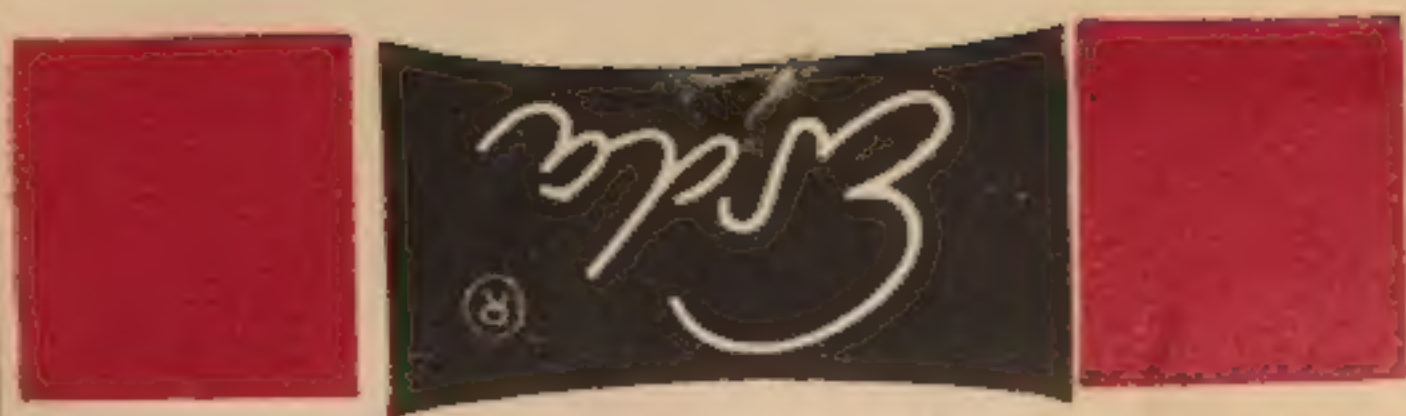


Мужские носки  
крепа

Сделано в Германской  
Демократической Республике





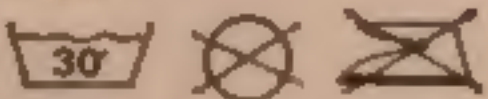
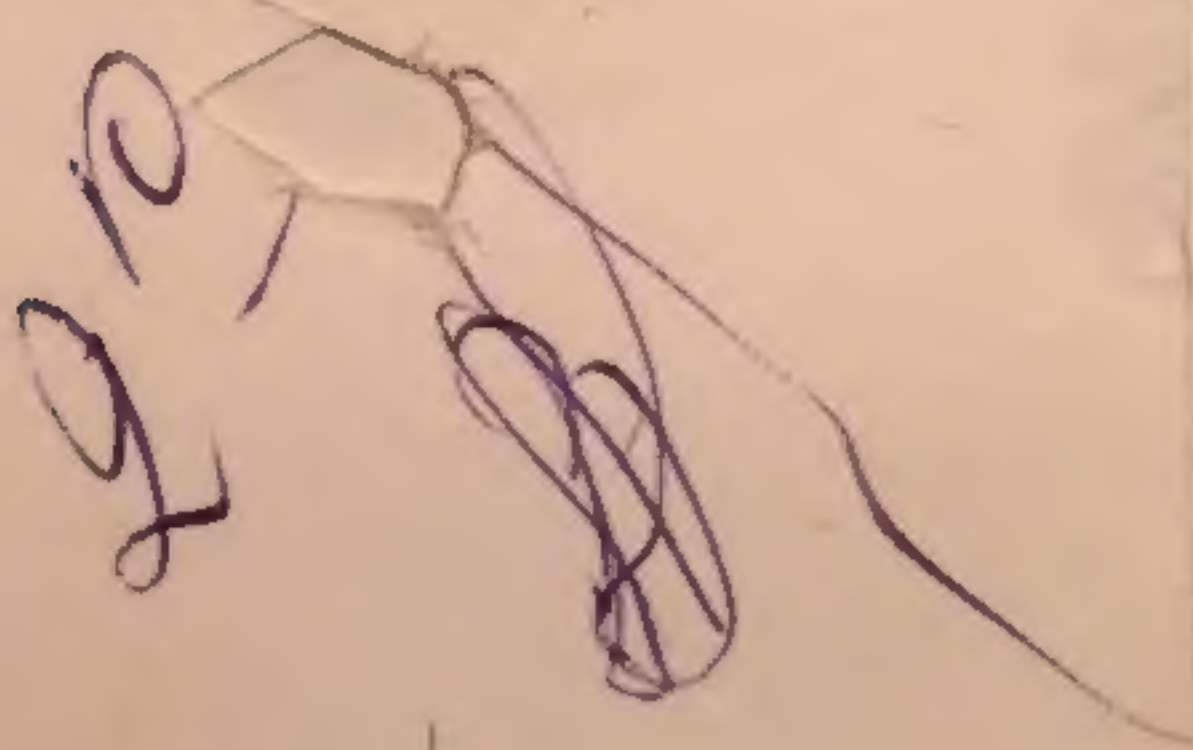


Сделано в Германской  
Демократической Республике  
КРЕНА

Мужские носки



264 604 V00



ФЕБ Чулочный комбинат  
„Эзда“  
ФЕБ Чулочная фабрика  
„Макс Рошер“ Горнау



ОБ  
В



**П. М. ЭРДНИЕВ**

---

**ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ  
В НАЧАЛЬНЫХ КЛАССАХ**

**КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ**

**«СТОЛЕТИЕ»  
МОСКВА 1995**



ББК 74.262  
Э 75

## УЧЕНИЦЕ МАТ

В течение почти двух десятилетий автор — академик РАО, заслуженный деятель науки России и Калмыкии, доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой методики математики Калмыцкого госуниверситета — проводил исследования проблемы интенсификации процесса обучения математике.

В данной книге освещается методическая система одновременного изучения взаимно обратных действий и понятий, совместное изучение раздробления и превращения именованных чисел, использование метода противопоставления, использование удобных приемов подачи учебной информации.

ISBN 5-7459-0023-7

© Эрдниев П. М., 1995

(ал

Ре  
тива  
наши  
лизу  
укру  
Пр  
этап  
нии т  
в 20  
учно-  
(1968  
лов;  
нико  
по м

\* Те  
под на  
тики в  
класс  
школа  
1993).  
\* П  
Просв  
школе  
и мето  
в нача  
ев. У  
Просв  
«СТО

1\*



# Оглавление

Программа обучения по УДЕ в начальной школе (альтернативная система учебников математики для I — IV классов) . . . . .	3
--	---

## Глава I. ПЕРВЫЙ ДЕСЯТОК

1. Сравнение (противопоставление) понятий на первых уроках . . . . .	20
2. Обучение сравнению понятий по таблице (матрице) . . . . .	21
3. Работа над числовым рядом . . . . .	25
4. Совместное изучение сложения чисел и разложения числа на слагаемые . . . . .	29
5. Изучение переместительного закона сложения . . . . .	31
6. Совместное изучение сложения и вычитания . . . . .	34
7. Решение деформированных примеров . . . . .	43
8. Можно ли предлагать учащимся неверно решенные примеры? . . . . .	45
9. Решение примеров, в которых надо определить знак действия и неизвестный компонент . . . . .	49
10. Действия с нулем . . . . .	52
11. Введение понятий «равенство» и «неравенство» . . . . .	55

## Глава II. ВТОРОЙ ДЕСЯТОК

1. Совместное изучение нумерации и простейших случаев сложения и вычитания в пределах 20 . . . . .	60
2. Сложение и вычитание в пределах 20 без перехода через десяток . . . . .	63
3. Сложение и вычитание в пределах 20 с переходом через десяток . . . . .	73
4. Работа с таблицей Пифагора . . . . .	84
5. Связь между деформированными примерами и уравнениями . . . . .	85

## Глава III. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ В ПРЕДЕЛАХ 100

1. Подготовительные упражнения . . . . .	87
2. Сложение и вычитание без перехода через десяток . . . . .	92
3. Сложение и вычитание с переходом через десяток . . . . .	97



4. О возможном одновременном изучении действий в пределах 100 и тех же действий над круглыми десятками в пределах 1000 . . . . . 103
5. О работе над понятиями «равенство», «уравнение» и «неравенство» . . . . . 109

#### Глава IV. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ

1. Классификация простых задач (в одно действие) на сложение и вычитание . . . . . 115
2. Одновременное изучение задач на нахождение суммы и слагаемого . . . . . 116
3. Задачи на нахождение разности, уменьшаемого и вычитаемого . . . . . 121
4. Противопоставление задач на нахождение суммы и разности . . . . . 128
5. Одновременное изучение задач на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц. Задачи на разностное сравнение . . . . . 130
6. Задачи, в которых используется понятие «на столько-то больше», а при решении выполняется вычитание (и наоборот) (косвенные задачи) . . . . . 137
7. Выработка множественных связей при решении задач на сложение и вычитание . . . . . 140
8. Простая и составная задача . . . . . 142
9. Обратная задача к задачам в два действия . . . . . 144

#### Глава V. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ В ПРЕДЕЛАХ 100

1. О системе простых задач, рассматриваемых при изучении табличного умножения и деления . . . . . 149
2. Задачи на умножение и деление по содержанию и деление на равные части . . . . . 151
3. Изучение переместительного закона умножения . . . . . 159
4. Задачи на уменьшение и увеличение числа в несколько раз и на кратное сравнение величин . . . . . 163
5. Противопоставление задач на разностное и кратное сравнение . . . . . 169
6. Задачи, в которых используется понятие «во сколько раз больше», а при решении выполняется деление . . . . . 171
7. Составление обратных задач к задачам в два действия . . . . . 173



8. Нахождение части числа, числа по величине его части; решение задач типа: «Какую часть составляет одно число от другого?» .....	175
9. Изучение внетабличного умножения и деления .....	179
10. Изучение деления двузначных чисел на двузначное без перехода через десяток .....	186
11. Изучение умножения и деления двузначного числа на однозначное с переходом через десяток ...	188
12. Изучение деления двузначного числа на двузначное с переходом через десяток .....	192
13. О возможном слиянии центра «сотня» с некоторыми вопросами центра «тысяча» .....	194

## Глава VI. ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ АРИФМЕТИКИ

1. Сопоставление переместительного закона сложения и умножения .....	200
2. Изучение зависимости между компонентами и результатами действий .....	202
3. Изменение суммы и произведения в зависимости от изменения слагаемого и множителя .....	205

## Глава VII. ОБУЧЕНИЕ СОСТАВЛЕНИЮ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. О месте задач в курсе математики начальной школы .....	211
2. Методика составления задачи, обратной к задаче в несколько действий .....	213
3. Задачи в три действия .....	219
4. Задачи на приведение к единице .....	226
5. Задачи на движение .....	231
6. Табличное изображение задач .....	236

## Глава VIII. ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

1. Занимательные задачи на свойства действий .....	243
2. Занимательные задачи на расстановку чисел .....	245
3. Занимательные (магические) квадраты .....	249
4. Занимательные числовые равенства (тождества) ....	250
5. Задачи-парадоксы с неожиданными ответами .....	252
6. Отгадывание чисел .....	253
7. Задачи, связанные с составлением таблиц .....	257



## Программа обучения по УДЕ в начальной школе (альтернативная система учебников математики для I — IV классов)

Результатом 30-летних исследований нашего коллектива явилось пятое издание в «Просвещении» (1992/93) наших учебников математики для I — VII классов\*, реализующих целостную методическую систему обучения **укрупнением дидактических единиц (УДЕ)**.

Признание школой технологии УДЕ проходило все этапы утверждения системы при постоянном обсуждении теории и практики учителями и учеными, а именно. в 20 кандидатских и докторских диссертациях; на 6 научно-практических конференциях по УДЕ в Элисте (1968 — 94); в материалах центральных газет и журналов; в рецензиях на предыдущие издания наших учебников и на соответствующие им пособия для учителей по методике обучения\*\*; на дискуссии, проведенной

---

\* Тексты наших учебников для двух первых классов изданы в книге под названием «Укрупнение дидактических единиц на урках математики в I — II классах» (М.: Просвещение, 1992). Учебники для III — IV классов набраны там же и должны были увидеть свет в 1993 году. В школах учат по нашему учебнику для V — VI классов (М.: Просвещение, 1993).

\*\*П. Эрдниев. Взаимно обратные действия в арифметике. М.: Просвещение, 1969. Его же. Обучение математике в начальной школе. М.: Просвещение, 1976. П. Эрдниев, Б. Эрдниев. Теория и методика обучения математике укрупнением дидактических единиц в начальной школе. М.: Педагогика, 1988. П. Эрдниев, Б. Эрдниев. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. М.: Просвещение, 1986. Эти книги будут изданы в 1995 г. в издательстве «СТОЛЕТИЕ».



журналом «Начальная школа» (НШ) на базе статьи П.Эрдниева и Б.Эрдниева «О необходимости улучшения программы по математике для четырехлетней начальной школы» («НШ», 1987, N 12)\*.

В 1992/93 годах проблемы УДЕ, как новаторской технологии обучения, рассматривались в наших журнальных и газетных публикациях («Начальная школа», «Математика в школе», «Педагогический вестник», «Педагогический календарь»).

Сказанное выше показывает, что общая проблематика данной работы в определенной степени известная читателям журнала «НШ», в котором ряд лет, параллельно с авторскими, печатались также и отклики учителей-практиков о системе УДЕ.

Укажем лишь, что 30 учителей, отмеченных в свое время премиями АПН СССР, сообщили нам об успешном использовании ими на своих уроках технологических приемов УДЕ. Различные аспекты теории УДЕ исследованы в 20 диссертациях. Монографии авторов переведены в Германии и Японии.

Остановимся кратко на основных характеристиках учебников УДЕ, издаваемых нами последовательно для всех классов базовой девятилетней школы (новые издания — с 1992 г.).

Методическая система УДЕ представляет самобытную, приоритетную и конкурентоспособную технологию обучения. Психофизиологические истоки данного научного направления восходят к исследованиям лауреата Нобелевской премии академика И.П. Павлова. Вот его слова, ставшие девизом УДЕ: «Противопоставление ускоряет, облегчает наше здоровое мышление».

Отнюдь не случайно в наших учебниках сознательно использовано печатание взаимно обратных задач (теорем, функций) друг против друга в двух параллельных колонках, что и есть противопоставление контрастных суждений.

---

\* Данный анализ программы содержится также в двухтомнике П.М. Эрдниева «Укрупнение дидактических единиц как технология обучения». М.: «Просвещение», ч. 1, 1992.



Ученик великого Павлова, академик П.К. Анохин считал, что по практике УДЕ школы России опережают другие страны.

«Все вопросы обучения идут с обязательной корректирующей ролью обратных афферентаций и только на этом основании и возможно самообучение», — подчеркивал П.К. Анохин.

Многие учителя справедливо именуют обсуждаемую систему кратко как «методику обратных задач».

В последние годы в мировой науке оживленно обсуждается методология познания, разработанная лауреатом Нобелевской премии академиком И.Р. Пригожиным; «Стрела времени» Пригожина обретает тот дидактический смысл, что умозаключения по аналогии, как основное средство творческого мышления человека, должны занять свое законное место в контексте урока, в системе упражнений.

Вот простейший пример умозаключения по аналогии: если пять да два семь, то немедленно возникают логические следствия, что  $50 + 20 = 70$ ;  $500 + 200 = 700$  и т.п.

Понятно теперь, почему в наших учебниках начальной школы оправдалось слияние воедино концентров «сотня» и «тысяча», по традиции изучавшихся порознь через полгода друг после другого.

Уже одна эта «деталь» принесла каждому учителю полсотню часов экономии учебного времени! Дидактика — наука малых параметров.

В методологии УДЕ делается акцент на симультанное мышление детей, на когнитивные процессы (на стратегию понимания), а не на частные упражнения, рассчитанные поэтапно в одном случае на «развитие памяти», в другом — на «развитие мышления» и т.п.

В наших учебниках для девятилетней школы красной нитью проходит актуализация всех пяти носителей учебной информации, а именно: слова, фигуры (рисунки), числа и знака (символа), предмета (модели), причем в разных их сочетаниях. Намеренное усиление правополушарных (образных) компонентов знаний, характерное для наших учебников, должно быть учтено в пособиях и по другим дисциплинам.



...Как-то нам пришлось в стрессовой ситуации искать ответ на вопрос журналиста, в чем же преимущества учебников УДЕ? Обучение по учебникам УДЕ доступно любому учителю и всякому школьнику (разумеется, при их совместном желании познать математику).

Экономия расхода учебного времени благодаря УДЕ достигает 30% (даже у начинающего учителя), причем общее количество усваиваемой школьником информации, говоря условно, возрастает также не менее чем на треть против общепринятых норм.

Для автора этих строк было неожиданно, когда собеседник оставался неудовлетворенным этими оценочными суждениями.

Журналист поставил наконец «неожиданный» вопрос: в чем же причина доступности УДЕ учителю и школьнику, ее эффективности, в принципе достижимой при общепринятых учебниках.

Позволим себе здесь небольшое отступление.

Ныне среди математиков обсуждается весьма серьезный вопрос: «Как спасти математику» (в смысле сделать ее более понятной, доступной массе учащихся). Исследователи приходят к выводу, что «самую логичную» среди наук невозможно спасти одними логическими средствами!

Известные математики Д.И. Мордунай-Болтовской, Феликс Клейн, Н.Е. Жуковский и др. указывали, что здесь надобно искать выход в закономерностях психологии, т.е. в методике и технологии обучения.

В данной связи поучительно привести следующие размышления.

...Учительница И.Л. Улицкая в своем отзыве об УДЕ указала на следующую деталь: дети составляют и решают обратные задачи «активно и радостно» (И. Улицкая. А вопросы остаются. — Правда. 1971. 9 мая).

И еще. Посетители открытых уроков по УДЕ всюду наблюдали непонятное явление резкого всплеска интереса детей причем не во время решения исходной задачи, например:  $2 \cdot 5 - 4 = 6 = x$ , а при переходе к составлению и решению задачи, обратной к решенной, например:  $y : 2 - 4 = 6$ ; решение  $(6 + 4) : 5 = 2 = y$ .

Итак, журналист своим вопросом помог нам вскрыть глубинный пласт психологии УДЕ, подчеркиваемый все



новыми приверженцами наших учебников в разных ситуациях, в селе и городе.

При этой технологии начинают функционировать подсознательные механизмы, связанные с проявлением эмоции удивления и радости у школьника.

В условиях общепринятой ныне традиционной методики обучения актуализация этих глубинных резервов мышления оказывается невозможной.

Заглянем в словарь русского языка Ожегова: «Радость — веселое чувство, ощущение большого душевного удовлетворения».

«Удовлетворение — чувство удовольствия, которое испытывает тот, чьи стремления, желания, потребности удовлетворены, исполнены».

«Удовольствие — чувство радости от приятных ощущений, переживаний, мыслей».

...В современных исследованиях установлено, что если логика, слова, счет — сосредоточены в левом полушарии, то чувства, эмоции, образная информация — преимущественно в правом полушарии у большинства людей (речь идет о правшах).

Для убедительности сравним решения прямой и обратных задач, формулы которых мы приводим выше.

**Прямая задача**

Купили 5 тетрадей по 20 рублей, а блокнот стоит на 40 рублей дешевле их. Почему блокнот?

Решение:  $20 \cdot 5 - 40 = 60$ .

**Обратная задача**

Блокнот стоит 60 рублей, это на 40 рублей дешевле, чем 5 тетрадей. Почему одна тетрадь?

Решение:  $(60 + 40) : 5 = 20$ .

Фундаментально здесь то, что порождение обратной задачи из прямой находит свое объяснение на базе физиологической теории функциональных систем

Представим слово Президенту международного центра профилактики стресса академику Российской академии медицинских наук и профессору К.В. Судакову: «...по своей архитектуре каждая функциональная система представляет циклическую замкнутую саморегулирующуюся организацию. Центральным пунктом этой организации является тот или иной полезный приспособи-



тельный результат». (К. Судаков, Основы физиологии функциональных систем, М.: Медицина, 1983. С. 23.)

Далее читаем там же, что акцептор результата действия «избирательно объединяет нервные элементы, расположенные на различных уровнях мозга», включая и эмоциональные отделы.

На уроке, проводимом по технологии УДЕ, ученику приходится произносить вслух целостный рассказ, формулируя и условие задачи, вопрос задачи и решение задачи ( $60 + 40 = 100$ ;  $100 : 5 = 20$ ).

Моментом, вызывающим улыбку на лице ученика, оказывается замыкание цепи суждений, а точнее говоря получение должного быть «загаданного» числа 20, как ответа «обратной задачи»! **Так срабатывает акцептор результата действий.**

Становится понятным, почему УДЕ оказывается в целом успешным у разных учителей при всех различиях методического их почерка. Учебное познание, организованное по технологии УДЕ, приносит ученику радость и удовлетворение, выражаемое обычно мимикой или возгласом каждый раз, когда решающий убеждается, что достиг цели, получил ожидаемое число или выражение!

Для полноты анализа непростого факта перехода от мира умозаключений к миру переживаний (от логики к эмоциям) уделим внимание и понятиям психологии.

Педагогов заботит ныне вопрос, как обеспечить не только запоминание, но и понимание изучаемого.

Вернемся опять к нашему примеру.

В современной практике обучения господствует элементаризм и аналитизм, то есть изучение отдельных без достаточных связей друг с другом.

Так, в нашем учебнике нумерованных заданий в два раза меньше, чем в стабильном; однако каждое укрупненное задание состоит, как правило, из трех пунктов:

- а) решить готовую задачу,
- б) составить и решить обратную задачу,
- в) по возможности составить по аналогии новую задачу и решить таковую.

Между тем все действующие ныне учебники математики сходны в том плане, что решение задачи не предполагает ее обращения (продолжения ее учеником), а затем обобщения в форме третьей задачи. Если вслед



за решением некоторой задачи немедленно следует согласно технологии УДЕ переиначивание уже знакомого сюжета в обратную задачу (по нахождению, скажем, числа «20» руб.), то, скажем, в других учебниках, напротив, вслед за первой задачей «на рубли» следует задача на килограммы (в 3 кульках по 4 кг муки) и т. д.

Так возникает вместо углубления калейдоскоп мыслей, при котором приходится мало времени в среднем на каждое число, понятие, суждение.

По технологии же УДЕ прямая и обратная задачи сращиваются в необычную крупную мыслительную единицу, в двуединое логическое образование, в оформлении которого поневоле участвуют и умственные старания личности самого обучаемого.

Рассуждая в категориях когнитивной психологии, можно утверждать, что при обучении по УДЕ (посредством сочинения взаимно обратных задач) каждое число, понятие, суждение дольше сохраняется в кратковременной памяти. А последнее немаловажно: «Чем больше сохраняется некоторый материал в кратковременной памяти, тем более прочным оказывается долговременный след».

Изданные нами учебники математики, одобренные еще в 1980 году Президиумом АПН СССР, полностью соответствуют действующим государственным программам. Найденные нами и проверенные в практике школ новые структуры знаний позволяют содержательно обновить изучаемый материал, что обеспечит такое важное качество знаний, как его целостность.

В программе III — IV классов нашли свое рациональное место работы с циркулем, линейкой и транспортиром. Оказалось уместным изучить меры объема в сопоставлении с мерой площади.

## ПЕРВЫЙ КЛАСС

### Десяток

Пропедевтика парных понятий сравнения: мало — много, выше — ниже, левее — правее, между, короче — длиннее, шире — уже, толще — тоньше, старше — моло-



же, дальше — ближе, медленнее — быстрее, легче — тяжелее.

Монографические изучения чисел первого десятка: одновременно рассматриваются название, обозначение, сравнение, откладывание чисел на счетах и на числовом луче, состав чисел, знаки равно ( $=$ ), не равно ( $\neq$ ), больше ( $>$ ), меньше ( $<$ ).

Прямая и кривая линии, окружность и овал.

Точка, прямая, отрезок, луч, обозначение их буквами; измерения длины отрезка и откладывание отрезков заданной длины; обозначение, название, построение, вырезывание треугольников и многоугольников; вершины, стороны, диагонали.

Квадрат и прямоугольник: измерение и вычисление периметра.

Знакомство с монетами в 1, 5, 10, 20 и 50 рублей (в течение года). Размен монет.

Одновременное изучение в пределах рассматриваемого числа: состав числа, сложение и вычитание, сравнение чисел.

Название компонентов сложения и вычитания.

Четверки примеров на сложение и вычитание:

$3 + 2 = 5$	$5 - 2 = 3$
$2 + 3 = 5$	$5 - 3 = 2$

Объяснение связи трех чисел всевозможными способами:

прибавить — отнять,

плюс — минус,

больше — меньше на  $\square$ ,

увеличить — уменьшить на  $\square$ , получится,

превышает — недостает,

$\square$  да  $\square$  без  $\square$ ,

состоит из  $\square$  и  $\square$ .

Деформированные примеры (с пропущенными элементами):

$$\square + 5 = 7; 6 - \square = 4; 6 - 2 = \square; \square + 2 - \square = 4.$$



Составление и решение двух обратных задач к задаче в одно действие.

Решение триад взаимно обратных задач:

а) на нахождение суммы, первого слагаемого, второго слагаемого;

б) на нахождение разности, уменьшаемого и вычитаемого;

в) на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц и на разностное сравнение. Употребление понятий: прямая задача (в роли исходной) и обратная задача (полученная при преобразовании решенной задачи).

Сравнение отрезков по длине.

Переместительный закон сложения ( $a + b = b + a$ ).

Условие, когда сумма не изменяется.

Простейшие буквенные выражения:

$$a + b = b + a$$

$$a + 0 = 0 + a$$

$$a - a = 0 \quad a - 0 = a$$

Составление и решение задач по данному выражению.

Круглые десятки в пределах 100. Преобразование примера приписыванием нуля. Превращение единиц в десятки

$$1 + 2 = 3$$

$$10 + 20 = 30 \text{ и т.п.}$$

## Второй десяток

Десяток — как счетная единица (один десяток — десять. Два десятка — двадцать, ... десять десятков — сотня).

Устная и письменная нумерация чисел от одного до двадцати.

Откладывание чисел на числовом луче и на счетах.

Меры длины: метр и дециметр, дециметр и сантиметр; рубль и сто рублей.

Килограмм — мера массы.



Сложение и вычитание отвлеченных и именованных чисел с круглыми десятками ( $10 + 2 = 12$ ;  $2 + 10 = 12$ ;  $12 \text{ см} - 10 \text{ см} = 2 \text{ см}$ ,  $12 \text{ руб.} - 2 \text{ руб.} = 10 \text{ руб.}$ ).

Простой пример ( $3 + 4 = \square$ ), составной пример ( $3 + 4 + 2 = \square$ ).

Простая и составная задача.

Задача с двумя вопросами.

Сложение и вычитание с переходом через десяток ( $8 + 7 = 15$ ,  $15 - 7 = 8$ ).

Пифагорова таблица сложения однозначных чисел.

Преобразование примера в пределах 20 в пример в пределах 200 (приписыванием нуля ко всем компонентам примера).

Нумерация чисел первой сотни. Состав двузначного числа (десятки и единицы).  $39 = 30 + 9$ ,  $39 - 9 = 30$ .

Откладывание числа на счетах. Построение прямоугольников, содержащих определенное число клеток.

## ВТОРОЙ КЛАСС

### Сотня

Нумерация чисел, чтение и запись двузначных чисел, откладывание их на счетах.

Магический квадрат ЛО-ШУ ( $3 \times 3$ ).

Единицы измерения длины (мм, см, дм, м), массы (кг).

Раздробление и укрупнение десятичных мер ( $7 \text{ м} = 70 \text{ дм}$ ).

Одновременное изучение сложения и вычитания отвлеченных и именованных чисел в пределах 100.

В связи с изучением чисел в пределах 100 постоянно проводятся упражнения по составлению и решению триад взаимно обратных задач на действия первой ступени в одно действие. (Они указаны в программе первого класса.)

Сложение и вычитание отвлеченных и именованных чисел в пределах 100 с круглыми десятками.

$$\begin{array}{ll} 50 + 7 = 57 & 57 - 7 = 50 \\ 7 + 50 = 57 & 57 - 50 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 \text{ дм} + 4 \text{ см} = 64 \text{ см} \\ 64 \text{ см} - 6 \text{ дм} = 4 \text{ см} \end{array}$$



Одновременное изучение действий первой ступени без перехода через десяток (в пределах 100).

$$23 + 31 = 54 \quad 54 - 31 = 23$$

$$4 \text{ м } 5 \text{ дм} + 2 \text{ м } 3 \text{ дм} = 6 \text{ м } 8 \text{ дм}$$

Изучение сложения и вычитания отвлеченных и именованных чисел в пределах 100 с переходом через десяток.

$$23 \pm 49$$

$$6 \text{ дм } 3 \text{ см} \pm 2 \text{ дм } 8 \text{ см}$$

Сложение и вычитание чисел на счетах.

Сложение и вычитание с переходом через десяток округлением.

$$\begin{aligned} 17 + 8 &= \\ 17 + (10 + 2) &= \\ (17 + 10) - 2 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27 - 2 &= \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 - 8 &= \\ 25 - (10 - 2) &= \\ (25 - 10) + 2 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 + 2 &= \\ &= 17 \end{aligned}$$

Умножение и деление действия второй ступени (в пределах 20).

Решение деформированных примеров с действиями второй ступени.

$$5 \cdot \square = 15 \quad \text{и} \quad \square : 5 = 6$$

Четверки примеров на умножение и деление:

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$8 : 4 = 2$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$8 : 2 = 4$$

Переместительный закон умножения, запись в буквах  $a \cdot b = b \cdot a$ .

Сравнение действий над нулем и единицей (и их задачные интерпретации):

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a - 0 = a$$

$$a : 1 = a$$

$$a - a = 0$$

$$a : a = 1$$



Триада взаимно обратных задач:

а) повторение равных слагаемых.

Переход к умножению (и обратно).

$$2 + 2 + 2 = 6 \leftrightarrow 2 \cdot 3 = 6$$

Умножение и деление по содержанию.

Деление на равные части.

б) Увеличение и уменьшение числа в несколько раз.

Кратное сравнение чисел и величин.

Совместное изучение таблицы умножения и деления (включительно до умножения и деления на 4):

$$4 \cdot 9 = 36 \quad 36 : 4 = 9$$

$$9 \cdot 4 = 36 \quad 36 : 9 = 4$$

Площадь и периметр квадрата и прямоугольника ( $P = d \cdot ш.$ ).

Единицы измерения площади и сравнения их с мерами длины:

$$1 \begin{matrix} \text{см} \\ \text{дм} \\ \text{м} \end{matrix} = 10 \begin{matrix} \text{мм} \\ \text{см} \\ \text{дм} \end{matrix} \quad 1 \begin{matrix} \text{см}^2 \\ \text{дм}^2 \\ \text{м}^2 \end{matrix} = 100 \begin{matrix} \text{мм}^2 \\ \text{см}^2 \\ \text{дм}^2 \end{matrix}$$

Построение прямоугольников с данной площадью.

Порядок действий. Деформированные упражнения ( $\square - 20) : 5 = 6$ .

Цена. Количество товара. Стоимость.

Задачи на приведение к единице.

Скобки. Порядок действий.

Решение задач в два действия.

Самостоятельное составление аналогичных задач по заданному выражению.

Составление учителем и решение совместно с учащимися обратных задач к любой простой задаче и к некоторым задачам в два действия.

Единицы времени: секунда, минута, час.

Определение времени по часам.



## ТРЕТИЙ КЛАСС

### Сотня. Тысяча

В третьем классе продолжают систематические упражнения по решению триады взаимно обратных задач на основе решенной любой простой задачи. (Эти задачи указаны в программах первого и второго классов.)

Умение преобразовать любую задачу в одно действие в две обратные должно стать главным мыслительным средством ученика III — IV классов и показателем его логического развития.

В III классе завершается изучение всей таблицы умножения и деления чисел в пределах 100 при одновременном освоении аналогичных действий над круглыми десятками в пределах 1000.

Основное технологическое средство такой методики — это тщательная и систематическая отработка переходов от действий над единицами к осмыслению того же действия с круглыми десятками (приписыванием нуля и чтение вслух обобщенного примера).

$$6 \cdot 7 = 42 \rightarrow 60 \cdot 7 = 420$$

$$42 : 6 = 7 \rightarrow 420 : 60 = 70 \text{ и т. п.}$$

Вначале важно вслух и ритмично прочитывать подобные пары табличных примеров, например:

по шесть взять семь раз — получится сорок два;

по шестьдесят взять семь раз — получится четыреста двадцать.

Заполнение таблицы значений контрастных выражений вида  $a + 4$  и  $a \cdot 4$ ;  $b - 50$  и  $b : 50$ ;  $x - 6$  и  $x + 6$ ;  $24a$  и  $24 : a$ . Решение соответствующих уравнений:

$$a + 4 = 76; a \cdot 40 = 160 \text{ и т. п.}$$

Вслух произносится правило решения уравнений. Например,

$$a + 40 = 76:$$

«Чтобы найти неизвестное слагаемое  $a$ , надо от суммы семьдесят шесть вычесть известное слагаемое сорок».

Корень уравнения  $a$  равен тридцати шести.



«Проверяю: к тридцати шести прибавить сорок — получится семьдесят шесть».

Магические квадраты три на три, четыре на четыре. Триады взаимно обратных задач:

а) Увеличение и уменьшение числа в несколько раз и кратное сравнение чисел и величин.

Аликвотные дроби ( $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{10}$ ).

б) Нахождение одной части числа и числа по величине одной его части.

Решение задачи вида: какую часть составляют 3 от 6? (30 от 60.)

Освоение действия над именованными числами в связи с освоением таблицы десятичных мер. Пары примеров с отвлеченными и именованными числами.

Вычисления на счетах.

а) без перехода через десяток:

$$65 \pm 32; \quad 650 \pm 320;$$

$$6 \text{ м } 50 \text{ см} \pm 3 \text{ м } 20 \text{ см};$$

б) с переходом через десяток:

$$52 \pm 39; \quad 520 \pm 390;$$

$$5 \text{ ц } 20 \text{ кг} \pm 3 \text{ ц } 90 \text{ кг};$$

в)

$$8 \cdot 7 = 56$$

$$80 \cdot 7 = 560$$

$$80 \text{ см} \cdot 7 = 5 \text{ м } 60 \text{ см}$$

$$5 \text{ м } 60 \text{ см} : 80 \text{ см} = 7 \text{ (раз)}$$

и т. п.

Переместительные законы сложения и умножения.

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

В I — III классах выполняются упражнения на построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки.

Деление отрезка, окружности на 2, 4, 8 частей.

Построение правильных многоугольников, шестиугольников, треугольника, двенадцатиугольника, четы-



реугольника, восьмиугольника (эти упражнения выполняются и на уроках труда).

Деление с остатком. Проверка деления с остатком.

Внетабличное умножение и деление в пределах 100 и соответствующие случаи умножения и деления круглых десятков в пределах 1000. ( $13 \cdot 2 = 26$ ;  $26 : 13 = 2$ ;  $26 : 2 = 13$ ;  $260 : 20 = 13$ ;  $1 \text{ м } 30 \text{ см} \cdot 2$ ;  $2 \text{ ц } 60 \text{ кг} : 13$ ;  $2 \text{ руб. } 60 \text{ коп.} : 2$ .)

Сравнение свойств аналогичных понятий сложения и умножения, вычитания и деления.

Когда не изменяется сумма и произведение?

Единицы времени: сутки, месяц, год.

Периметр и площадь прямоугольника.

Письменное умножение и деление на однозначные числа (простейшие случаи).

## ЧЕТВЕРТЫЙ КЛАСС

В четвертом классе завершается начальный курс математики.

Нумерация чисел не более чем шестизначных. Действия умножения и деления ограничиваются в основном четырехзначным результатом.

В четвертом классе осуществляется упрочение навыков по решению взаимно обратных задач в одно-два действия, выполняемых большей частью устно с небольшими числами.

В этих упражнениях важно систематически повторять все триады простых взаимно обратных задач в их единстве, а именно: на сложение и вычитание (I — II классы, всего 9 видов задач); три триады взаимно обратных задач на умножение и деление (II — III классы, всего 9 видов задач).

В III — IV классах решаются составные задачи в 2 — 3 действия, получаемые комбинацией указанных выше 6 триад задач. Решения задач оформляются как отдельными действиями, так и в виде числового выражения, в форме граф-схем.

Четкая ориентация учителя в такой классификации задач облегчает ему самостоятельное составление задач, которые в обилии используются опытными учи-



телями при проведении урока, с учетом ситуаций затруднения, возникающих у детей при усвоении материала.

Как правило, материал, приведенный в учебниках УДЕ, следует предлагать для самостоятельной работы учащихся, для домашней работы.

Учитель же обычно составляет в ходе живого урока свои собственные задания с использованием местных данных.

В соответствии с логикой учебника УДЕ, используются другой набор чисел, сюжетов, способов сравнения величин и т.п.

### Миллион

Нумерация, запись и чтение чисел в пределах миллиона, откладывание их на счетах. Десятичные меры: тонна, килограмм, грамм; километр, метр, миллиметр.

Увеличение и уменьшение числа в 10, 100, 1000 раз.

Признаки делимости чисел на 10, 100, 1000.

Удивительные равенства. Магические квадраты.

Сочетательный закон сложения и умножения

$$a + b + c = a + (b + c)$$

$$a \cdot b \cdot c = a(b \cdot c)$$

Распределительный закон умножения и деления.

$$(a \pm b)x = ax \pm bx$$

$$(a + b) : y = a : y + b : y$$

Одновременное изучение письменного сложения и вычитания на счетах. Сокращенные способы сложения и вычитания.

Одновременное изучение письменного умножения и деления на однозначное число (прикидка отчета подсчетом числа цифр в произведении и частном).

Признаки делимости на 2, 5, 3 и 9 (без доказательств).

Задачи на приведение к единице. Задачи, решаемые способом сравнения. Составление и решение задач, обратные к задачам в одно-два действия.



Одновременное изучение письменного умножения и деления на двузначные числа.

Письменное умножение и деление на круглые десятки и сотни.

Задачи на нахождение суммы, разности и частного двух произведений. Задачи им обратные.

Устное умножение и деление на 5, 50, 500; на 25 и 250.

Задачи на нахождение чисел по двум суммам и двум разностям, задачи им обратные.

Устное умножение на 11, 101, 1001 и на 9, 99, 999.

Умножение на числа, содержащие нули в конце и в середине.

Деление отрезка и окружности на 2, 4, 8 частей с помощью циркуля и линейки. Измерение угла транспортиром. Сумма углов треугольника и четырехугольника.

Меры времени. Сложение и вычитание мер времени.

$$1 \begin{matrix} \text{час} \\ \text{мин} \end{matrix} = 60 \begin{matrix} \text{мин} \\ \text{сек} \end{matrix}$$

Задачи на движение в одном и противоположном направлениях; составление и решение обратных задач.

Нахождение нескольких частей числа по величине нескольких его частей. Нахождение процентов от числа и числа по величине его процентов.

Единицы длины, площади и объема. Заучивание этих соотношений в постоянном сравнении:

$$1 \frac{\text{дм}}{\text{м}} = 10 \frac{\text{мм}}{\text{см}} \quad \bigg| \quad 1 \frac{\text{дм}^2}{\text{м}^2} = 100 \frac{\text{мм}^2}{\text{см}^2}$$

$$1 \frac{\text{дм}^3}{\text{м}^3} = 1000 \frac{\text{мм}^3}{\text{см}^3}$$

Площадь прямоугольника и объем параллелепипеда. Изготовление моделей и каркасов фигур.



# Глава I

## ПЕРВЫЙ ДЕСЯТОК

### 1. Сравнение (противопоставление) понятий на первых уроках

На первых же занятиях учитель должен поставить перед собой цель научить школьников применять пары понятий, содержание которых раскрывается в процессе составления соответствующих предложений с этими словами.

Приведем примеры наиболее распространенных пар понятий, которыми надо пользоваться не только на уроках математики, но и на уроках по развитию речи:

больше — меньше;	длиннее — короче;
выше — ниже;	тяжелее — легче;
шире — уже;	толще — тоньше;
правее — левее;	дальше — ближе;
старше — моложе;	быстрее — медленнее и т.п.

При работе над такими парами понятий важно использовать не только иллюстрации в учебнике, но и наблюдения детей; так, например, из окна класса они видят, что за рекой стоит дом, и формулируют фразы: «Река ближе к школе, чем дом, а дом дальше от школы, чем река».

В этих упражнениях необходимо добиваться правильной грамматической замены одного суждения ему противоположным: «Каменный дом выше деревянного, значит, деревянный дом ниже каменного» (или наоборот).

При ознакомлении с понятиями «длиннее — короче» можно показать сравнение предметов по длине наложением одного из них на другой (что длиннее: карандаш или пенал?).

Смысл понятий «тяжелее — легче» разъясняется на основе опыта: возьмите в одну руку тетрадь, а в дру-



кую — книгу. Что тяжелее: книга или тетрадь? Что легче: книга или тетрадь?

На уроках арифметики и развития речи полезно решать логические задачи, преследующие цель научить пользоваться противоположными понятиями:

1) Кто старше: отец или сын? Кто моложе: отец или сын? Кто из них родился раньше? Кто позже?

2) Что легче книги? (Карандаш легче книги.) Тяжелее карандаша? (Книга тяжелее карандаша.)

3) Сравните книгу и портфель по ширине. Что шире: книга или портфель? Что уже: книга или портфель?

## 2. Обучение сравнению понятий по таблице (матрице)

Обучение процессу сравнения можно сделать более интересным, вводя так называемые матричные (табличные) упражнения.

На доске строится таблица из четырех клеток и разъясняется смысл понятий «столбец» и «строка».

Вводим понятия «левый столбец» и «правый столбец», «верхняя строка» и «нижняя строка» (рис. 1).

Вместе с учащимися показываем (имитируем) эти понятия.

Покажите столбец (дети двигают рукой сверху вниз).

Покажите левый столбец, правый столбец (дети проводят два маха рукой сверху вниз).

Покажите строку (мах рукой слева направо).

Покажите верхнюю строку, нижнюю строку (два маха рукой, показывающие верхнюю строку, нижнюю строку).

Надо добиваться того, чтобы учащиеся точно указывали положение клетки: «верхняя левая клетка», «нижняя правая клетка» и т.п. Тут же решается обратная задача, а именно: учитель указывает на какую-нибудь клетку

	Левый столбец	Правый столбец
Верхняя строка		↓
Нижняя строка	→	Правая нижняя клетка

Рис. 1.



таблицы (матрицы), ученик дает соответствующее название этой клетке.

Подобные упражнения постепенно приучают детей к пространственной ориентировке и имеют важное значение при изучении координатного метода в последующем.

Пусть речь идет о сравнении длины предметов, различающихся материалом (бумага, ткань) или цветом (красная и зеленая).

На разграфленном листе бумаги раскладываются четыре предмета в таком порядке (рис. 2):



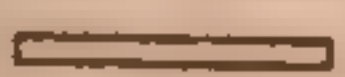

Предмет \ Цвет	Красная	Зеленая
Веревочка		
Ленточка		

Рис. 2.

По этой таблице проводим разъяснения: равные по длине предметы имеют общий цвет, но разные названия (так, красная веревочка и красная ленточка имеют равные длины); предметы одного названия различаются как цветом, так и длиной (например, красная веревочка длиннее зеленой веревочки).

Анализ соотношений можно провести дальше, доводя рассуждения до логических обобщений:

- 1) красная веревочка длиннее зеленой веревочки;
- 2) красная ленточка длиннее зеленой ленточки.

Приходим к обобщающему заключению (для данного случая): значит, любой красный предмет длиннее любого зеленого предмета.

Аналогично устанавливаем: красные предметы равны по длине, зеленые предметы тоже имеют равные длины. Значит, одноцветные предметы имеют равные длины.

Работая над сравнением понятий, полезно познакомить с относительностью результата сравнения, а именно с тем, что один и тот же предмет *В* может быть длиннее предмета *А*, но короче предмета *С* (рис. 3).




Черный карандаш  *А*  
 Синий карандаш  *В*  
 Красный карандаш  *С*

Рис. 3.

На основе таких простейших наблюдений можно познакомить учащихся с возник-



новением силлогизмов\*, представляющих самую распространенную форму логических умозаключений.

Вот построение силлогизма на основе сравнения длин тех же трех предметов.

### Первое рассуждение

1. Черный карандаш  
короче синего  
карандаша.

2. Синий карандаш  
короче красного  
карандаша.

Значит, черный  
карандаш короче  
красного карандаша.

### Второе рассуждение

1. Красный карандаш  
длиннее синего  
карандаша.

2. Синий карандаш  
длиннее черного  
карандаша.

Значит, красный  
карандаш длиннее  
черного карандаша.

Примечание. Средний термин «синий карандаш» не входит в заключение.

Данное рассуждение полезно сначала сопровождать конкретным сравнением трех предметов.

Затем можно предложить решить логическую задачу словесно, без демонстраций, например:

1. Дом короче сарая.

2. Сарай короче ограды.

Значит, ...

(Требуется сравнить длину дома с длиной ограды.)

Упражнения с таблицей представляют в логическом отношении классификацию понятий по двум основаниям; стало быть, такие задания ценны для развития мышления, так как знакомят со сложными видами классификации понятий.

\* Силлогизмом называется умозаключение, в котором из двух суждений, связанных общим средним термином, получается третье суждение, называемое выводом (при этом средний термин в заключение не входит).



Как пример приведем таблицу, в которой учтено деление птиц как по среде обитания (водоплавающие — неводоплавающие), так и по образу жизни (домашние — дикие).

Среда обитания	Образ жизни	
	Домашние	Дикие
Водоплавающие	Гуси	Гагары
Неводоплавающие	Индюки	Воробьи

В клетках таблицы помещаются рисунки соответствующих птиц.

Рассматривая такую таблицу, учащиеся отвечают на вопросы двух родов:

Какая птица индюк? (Индюк — это неводоплавающая домашняя птица.)

Надо поставить и противоположный вопрос:

Назвать дикую неводоплавающую птицу. (Дикая неводоплавающая птица — это воробей.)

Пользуясь таблицей, удобно проводить интересные беседы на «загадку-отгадку».

Таблицы могут найти применение при решении логических задач на различение предметов.

Так, во время изучения сложения и вычитания в пределах десяти можно предложить таблицу с двумя входами: по горизонтали фигуры различаются по цвету, например: заштрихованные и незаштрихованные; по вертикали фигуры различаются по форме: криволинейные и прямолинейные (рис. 4).

По такой таблице (матрице) можно предлагать на узнавание интересные вопросы, развивающие наблюдательность учащихся:

1. Сколько фигур в левой верхней клетке? В нижней правой клетке? Какие это фигуры?

2. Где находятся незаштрихованные круги? Сколько их? Заштрихованные треугольники? Сколько их?

3. Какие фигуры расположены в верхней строке? Сколько их? В нижней строке? Сколько их?



Сколько всего фигур в двух строках?  
 4. Какие фигуры расположены в левом столбце? Сколько их?





Форма Цвет	Треугольники	Круги	Всего фигур
Незаштри- хованных			6 +
Заштри- хованных			3 ↓
Всего фигур	5 +	4 →	9

Рис. 4.

Какие фигуры расположены в правом столбце? Сколь-  
 ко всего фигур в двух столбцах?

### 3. Работа над числовым рядом

Большое значение для начальных уроков имеет рабо-  
 та над числовым рядом, который иллюстрируется чис-  
 ловой прямой.

Рост числового ряда прибавлением по единице удоб-  
 но иллюстрировать перемещением по числовой прямой  
 вправо (рис. 5).

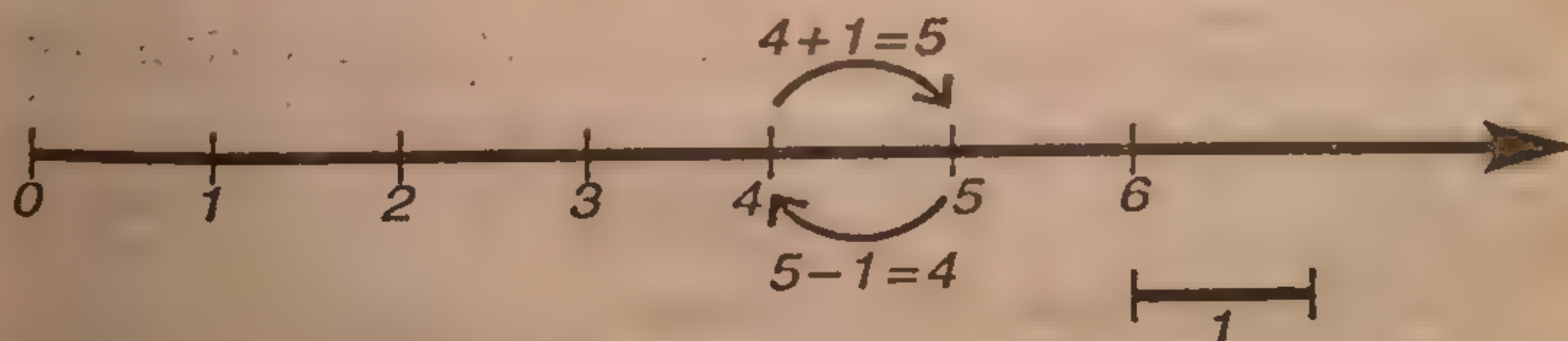


Рис. 5.

Если знак (+) связывается с перемещением по число-  
 вому ряду вправо на единицу, то знак (—) связывается  
 с обратным перемещением влево на единицу.



Итак, перемещение вправо связано с увеличением числа, а перемещение влево — с уменьшением числа.

Работая с числовым рядом, вводим понятия: начало числового ряда (число ноль) представляет левый конец луча; числу единица соответствует единичный отрезок, который надо изобразить отдельно от числового ряда.

Пусть учащиеся работают с числовым рядом в пределах трех. Выделяем два каких-либо соседних числа, например 2 и 3. Переходя от числа 2 к числу 3, дети рассуждают так: «За числом 2 следует число 3». Переходя от числа 3 к числу 2, они говорят: «Перед числом 3 идет число 2» (или: «Число 2 предшествует числу 3»).

Такой метод позволяет определить место данного числа по отношению как к предыдущему, так и к последующему числу; уместно тут же обратить внимание на относительность положения числа, например: число 3 одновременно является как последующим (за числом 2), так и предыдущим (перед числом 4).

Указанные переходы по числовому ряду выгодно связать с соответствующими арифметическими действиями.

Например: если мысль «за числом 2 следует число 3» изображается символически:  $2 + 1 = 3$ , то психологически выгодно создать сразу же вслед за ней противоположную связь мыслей, а именно: выражение «перед числом 3 идет число 2» подкрепляется записью:  $3 - 1 = 2$ .

Чтобы добиться понимания места какого-либо числа в числовом ряде, предлагаются парные вопросы:

1. **За** каким числом следует число 3? (Число 3 следует за числом 2.)

**Перед** каким числом расположено число 2? (Число 2 расположено перед числом 3.)

2. Какое число следует за числом 2? (За числом 2 следует число 3.)

Какое число идет перед числом 3? (Перед числом 3 идет число 2.)

3. **Между** какими числами находится число 2? (Число 2 находится между числом 1 и числом 3.)

Какое число находится между числами 1 и 3? (Между числами 1 и 3 находится число 2.)



Работу с числовым рядом удобно сочетать со сравнением чисел по величине, а также со сравнением положения чисел на числовой прямой.

Постепенно вырабатываем связи суждений вида: число 4 находится на числовой прямой правее числа 3; значит, 4 больше 3.

И наоборот: число 3 находится на числовой прямой левее числа 4; значит, число 3 меньше числа 4.

Приведем пример.

Пусть друг на друга наложены два цветных бруска, разделенных на клетки: в нижнем — 3 клетки, в верхнем — 2 клетки (рис. 6).



Рис. 6

Сравнивая количество клеток в верхнем и нижнем брусках, учитель составляет два примера на взаимно обратные действия ( $2 + 1 = 3$ ,  $3 - 1 = 2$ ), причем результаты их прочитываются разными способами:

$$2 + 1 = 3$$

$$3 - 1 = 2$$

а) к 2 прибавить 1, получится 3.

а) из 3 вычесть 1, получится 2.

б) 2 увеличить на 1, получится 3.

б) 3 уменьшить на 1, получится 2.

в) 3 больше 2 на 1.

в) 2 меньше 3 на 1.

г) 2 меньше 3 на 1.

г) 3 больше 2 на 1.

д) 2 на 1 будет 3.

д) 3 без 1 будет 2.

е) Число 2 сложить с числом 1, получится 3.

е) Из числа 3 вычесть число 1, получится 2.

Учитель. Если 2 увеличить на 1, то сколько получится?

Ученик. Если 2 увеличить на 1, то получится 3.

Учитель. А теперь скажите, что надо сделать с числом 3, чтобы получить 2.

Ученик. 3 уменьшить на 1, получится 2.

Обратим внимание на необходимость методически грамотного осуществления операции противопоставления.

Пусть решены следующие две задачи:



К четырем палочкам прибавить одну палочку, получится пять палочек:  $4 + 1 = 5$ .

Из пяти палочек вычесть одну палочку, получится четыре палочки:  $5 - 1 = 4$ .

Крайне важно сопровождать вначале эти операции конкретными действиями, перемещениями: прибавляя единицы, ученик придвигает к сосчитанной группе один предмет движением руки справа налево (движение при этом совершается как можно медленнее); обзрев результат операции (пять палочек), учащийся выполняет затем обратную операцию.

Учитель: Сколько у тебя палочек?

Ученик. У меня получилось 5 палочек.

Учитель. Как ты получил 5 палочек?

Ученик. К 4 палочкам прибавил 1 палочку, получилось 5 палочек.

Учитель. А теперь от 5 палочек отними 1 палочку. Сколько получилось?

Ученик (отделяет от группы той же рукой 1 палочку движением слева направо). От 5 палочек отнять 1 палочку, получится 4 палочки.

При таком противопоставлении обратная операция выполняется сразу же за прямой (не только «движением мыслей», но и реальным движением руки). Это наиболее благоприятный момент для ее восприятия: придвигаем палочку справа налево — прибавляем один; тем самым прежнее множество из  $a$  предметов увеличивается на 1; новое множество состоит из  $a + 1$  предметов; отодвигаем палочку слева направо — убавляем один (исходное множество из  $a + 1$  предметов уменьшается на 1, становится снова множеством из  $a$  предметов).

Существенно здесь еще и то, что в связи с изменением направления движения руки заменяется первоначальный глагол *прибавить* антонимом *отнять*: к 4 прибавить 1, получится 5; от 5 отнять 1, получится 4.

Целесообразно совокупное введение противоположных понятий, начиная с самых первых уроков арифметики.

Так, например, одновременное употребление трех глаголов: *прибавить* (к 2 прибавить 1), *сложить* (число 2 сложить с числом 1), *увеличить* (2 увеличить на 1), которые изображаются одними и теми же символами



( $2 + 1 = 3$ ), помогает детям усвоить сходство, близость этих слов по смыслу (подобные рассуждения можно провести относительно слов *отнять*, *вычесть*, *уменьшить* по отношению к примеру  $3 - 1$ ).

Точно так же сущность разностного сравнения усваивается в ходе многократного использования сравнения чисел с самого начала обучения (Что больше: 2 или 3? На сколько 3 больше 2? Сколько надо прибавить к 2, чтобы получить 3? и т.п.).

Большое значение для овладения смыслом этих понятий имеет изменение форм вопросов.

Так, например, в связи с решением примеров  $3 + 1 = 4$  и  $4 - 1 = 3$  могут быть предложены следующие парные вопросы:

1) На сколько надо увеличить число 3, чтобы получить 4?

2) Некоторое число больше 3 на 1. Какое это число?

3) Какое действие надо выполнить, чтобы число увеличилось? (Прибавить.)

4) Сравните числа 4 и 3. Какое число больше и на сколько больше?

5) Дано число 3. Назовите последующее число. И т.д.

1) На сколько надо уменьшить число 4, чтобы получить 3?

2) Неизвестное число меньше 4 на 1. Найти это число.

3) Какое действие надо выполнить, чтобы число уменьшить? (Вычесть.)

4) Сравните числа 4 и 3. Какое число меньше и на сколько меньше?

5) Дано число 4. Назовите предыдущее число. И т.д.

#### 4. Совместное изучение сложения чисел и разложения числа на слагаемые

В методической литературе эти две операции нередко рассматриваются отдельно.

Практика обучения показала гораздо большую эффективность одновременного изучения (двуединой) операции «сложения — разложения».

Пусть учащиеся решили задачу на сложение:



К трем палочкам прибавить одну палочку, получится четыре палочки.

Вслед за этой задачей сразу же следует поставить вопрос: «Из каких чисел состоит число 4? (4 палочки состоят из 3 палочек) (отсчитывает 3 палочки) и 1 палочки (отделяет еще 1 палочку).

Исходным упражнением может быть и разложение числа. Учитель спрашивает: «Из каких чисел состоит число 5?» (Число 5 состоит из 3 и 2.)

А затем предлагается такой вопрос: «Сколько же получится, если к 3 прибавить 2?» (К 3 прибавить 2, получится 5.)

Для той же цели полезно практиковать чтение примера в двух направлениях:  $5 + 2 = 7$ .

К 5 прибавить 2, получится 7 (слева направо).

7 состоит из 2 и 5 (справа налево).

$$5 + 2 = 7$$

Такое словесное противопоставление полезно сопровождать упражнениями на счетах, позволяющими видеть конкретное содержание соответствующих операций.

Так, при решении примера на сложение ( $5 + 2 = 7$ ) ученик сначала отсчитывал на счетах 5 косточек, затем к ним присоединял 2 и после этого объявлял результат: «К 5 прибавить 2, получится 7».

После решения этого же примера первокласснику предлагается показать, из каких же чисел состоит число 7.

Учитель. Какое же число получилось?

Ученик. К 5 прибавили 2, получилось 7.

Учитель. А теперь покажи, из каких чисел состоит число 7.

Ученик (сначала отделяет две косточки вправо, потом говорит). Число 7 состоит из 2 и 5.

Выполняя данные упражнения, целесообразно употреблять понятия «сумма», «слагаемые».

а) Сумма двух слагаемых равна 5; найти слагаемое,

б) из каких слагаемых состоит число 5?

в) Разложите сумму 5 на слагаемые.



## 5. Изучение переместительного закона сложения

Усвоение переместительного закона требует разнообразных упражнений, основанных вначале на практических манипуляциях с предметами.

Учитель. Возьмите в левую руку 3 палочки, а в правую — 2 палочки. Сколько всего палочек стало?

Ученик. Всего стало 5 палочек.

Учитель. Как подробнее сказать об этом?

Ученик. К 3 палочкам прибавить 2 палочки, будет 5 палочек.

Учитель. Составьте этот пример из разрезных цифр. (Ученик составляет пример:  $3 + 2 = 5$ .)

Учитель. А теперь поменяйте местами палочки: палочки, лежащие в левой руке, переложите в правую, а палочки из правой руки переложите в левую. Сколько теперь палочек в двух руках вместе?

Ученик. Всего в двух руках было 5 палочек, и сейчас получилось 5 палочек.

Учитель. Почему так получилось?

Ученик. Потому, что мы никуда не откладывали и не добавляли палочки. Сколько было, столько и осталось.

Учитель. Составьте из разрезных цифр решенные примеры.

Ученики (складывают:  $3 + 2 = 5$ ,  $2 + 3 = 5$ ). Здесь было число 3, а теперь число 2. А здесь было число 2, а теперь число 3.

Учитель. Мы поменяли местами числа 2 и 3, а результат остался прежним — 5. (Из разрезных цифр складывается пример:  $3 + 2 = 2 + 3$ .)

Переместительный закон подчеркивается также в упражнениях по разложению числа на слагаемые.

Учитель. Отсчитайте 7 кружочков. Отделите 3 кружочка влево. Сколько кружочков слева?

Ученик. Слева 3 кружочка.

Учитель. Сколько кружочков справа?

Ученик. Справа 4 кружочка.

Учитель. Из каких чисел состоит число 7?

Ученик. Число 7 состоит из 3 и 4 ( $3 + 4 = 7$ ).



Учитель. Покажите рукой, в каком направлении мы читали пример. (Учащийся двигает рукой слева направо.)

Учитель. А теперь показывайте рукой в обратном направлении. Сколько кружочков справа? Сколько кружочков слева? Из каких чисел состоит число 7?

Ученик. Число 7 состоит из 4 и 3.

Учитель. Отложите 5 красных палочек, положите справа еще 2 желтые. Пересчитайте. Сколько всего?

Ученик. Всего 7 палочек.

Учитель. Отложите сначала 2 желтые палочки, потом приложите справа столько красных, сколько было в первый раз. Сколько же красных палочек надо прибавить? Сколько всего стало палочек? Что вы заметили? Составьте пример к первой задаче. Составьте пример ко второй задаче.

Полезно также провести наблюдения над примером, записанным или составленным из разрезных цифр.

Учитель записывает на доске пример:  $5 + 2$ .

Учащийся решает его присчитыванием по единице:

$$5 + 1 = 6 \quad 6 + 1 = 7$$

После этого пример записывается полностью:

$$5 + 2 = 7$$

Учитель. Прочитайте пример.

Ученик. К 5 прибавить 2, получится 7.

Учитель. Составьте из тех же чисел другой пример на сложение так, чтобы получилось число 7.

Ученик. К 2 прибавить 5, получится 7:

$$2 + 5 = 7$$

Учитель. Мы прочитали эти примеры слева направо. Прочитайте их справа налево.

Ученик. 7 состоит из 2 и 5; 7 состоит из 5 и 2.

Составляется пример:

$$5 + 2 = 2 + 5$$

В связи с изучением переместительного закона повторяются понятия «слагаемые» и «сумма». Учащиеся заучивают следующие определения:



Числа, которые складываются, называются слагаемыми.

Число, которое получается при сложении, называется суммой.

Напишем пример по-другому:

$5 + 2 = 7$	$2 + 5 = 7$
5 — первое слагаемое,	2 — первое слагаемое,
2 — второе слагаемое,	5 — второе слагаемое
7 — сумма.	7 — сумма.

После этого формулируется правило:

От перестановки слагаемых сумма не изменяется.

Впоследствии для переместительного закона сложения

$$5 + 2 = 2 + 5$$

учитель вводит символическое изображение.

При изучении переместительного закона уместны упражнения с пропущенными элементами:

$$\square + 3 = 3 + \square$$

Обращаем внимание на то, что второе слагаемое в левой части и первое слагаемое в правой части совпадают.

Возникает вопрос: какое число можно записать внутри клетки?

Проводим наблюдения:

$$\begin{aligned} 1 + 3 &= 3 + 1 \\ 2 + 3 &= 3 + 2 \\ 5 + 3 &= 3 + 5 \end{aligned}$$

Выясняем: внутри клетки слева и справа оказывается одно и то же число: если в левой части равенства внутри клетки записано число 2 (или  $a$ ), то и в правой части равенства внутри клетки оказывается то же самое число 2 (или  $a$ ).

Результат наблюдения зафиксируем так:  $a + 2 = 2 + a$ .



Далее приходим к общепринятой буквенной записи переместительного закона.

Пусть первое слагаемое обозначено буквой  $a$ , второе слагаемое — буквой  $b$ .

Запишем числовые и буквенные равенства:

$$5 + 2 = 2 + 5$$

$$a + b = b + a$$

Во время обучающих бесед учитель вначале добивается запоминания названия компонентов при сложении и вычитании без заучивания определений. Пусть решен пример:

$$4 + 2 = 6$$

Учитель. Назови вот это число... (Попеременно показывает на числа 4, 2, 6.)

Ученики (отвечают). Первое слагаемое, второе слагаемое, сумма.

Можно обобщить понятие «слагаемое» на случай трех и больше слагаемых.

Учитель пишет пример:  $1 + 1 + 2 = \square$ .

Сколько чисел здесь складываются?

Чему равно первое слагаемое? (Покажи.)

Чему равно второе слагаемое? (Покажи.)

Чему равно третье слагаемое? (Покажи.)

Которые слагаемые равны друг другу?

Ученик. Первое слагаемое равно единице, второе слагаемое равно единице. Первое и второе слагаемые равны друг другу.

Можно предложить детям и обобщенное задание: составьте пример на сложение таких трех равных слагаемых, чтобы сумма их была равна 0 (нулю); 3 (трем); 6 (шести).

$$\square + \square + \square = 0$$

$$\square + \square + \square = 3$$

$$\square + \square + \square = 6$$

## 6. Совместное изучение сложения и вычитания

Практика обучения показывает, что изучение состава чисел первого десятка и изучение действий сложения и



вычитания в тех же пределах выгодно осуществлять одновременно на одних и тех же уроках.

Противопоставление двух действий — сложения и вычитания — надо показать прежде всего в плане конкретном, наглядном.

Для этого полезно вначале провести следующее наблюдение:

Учитель. Смотрите внимательно, что я буду делать. (В ящик, внутренняя часть которого не видна учащимся, опускает книгу, а затем тетрадь.) Что сейчас находится в ящике?

Ученик. В ящике находятся книга и тетрадь.

Учитель. Смотрите дальше, что я буду делать. (Вынимает из ящика тетрадь.) Что я сделал?

Ученик. Вы вынули из ящика тетрадь.

Учитель. А что осталось в ящике?

Ученик. В ящике осталась книга.

Учитель. А теперь смотрите дальше. (В ящик опускает 3 зеленых круга и 4 красных круга.) Что я сделал?

Ученик. Вы опустили в ящик 3 зеленых круга и 4 красных.

Учитель (вынимает из ящика 3 зеленых круга). Что осталось в ящике?

Ученик. В ящике осталось 4 красных круга. (Аналогичную операцию проводит учитель с красными кругами.)

Учитель (опускает в ящик сначала 3 палочки, затем еще 2 палочки такого же цвета). Сколько палочек теперь в ящике?

Ученик. В ящике 5 палочек. К 3 палочкам прибавить 2 палочки, получится 5 палочек.

Ученик вынимает из ящика все палочки и проверяет ответ пересчетом, затем снова опускает их в ящик.

Учитель. Сколько палочек мы опускали в ящик в первый раз? второй раз?

Ученик. В первый раз опускали 3 палочки, во второй раз опускали 2 палочки.

Учитель. А теперь я вынул из ящика 2 палочки. Сколько там осталось?

Ученик. Там осталось 3 палочки.

Учитель. Как ты узнал?



Ученик. Всего было 3 и 2 палочки. 2 вынули, 3 осталось.

Учитель (ко всему классу). А теперь составьте пример к данной задаче.

Ученик. Из 5 вычесть 3, получится 2. (На доске записывается:  $5 - 3 = 2$ .)

Подробное иллюстрирование взаимно обратных операций заставляет учащегося применять рассуждения, т.е. логические средства исследования. Ученик приходит к умозаключению, что в ящике осталось 2 палочки без предварительного зрительного пересчета предметов, находящихся в ящике, т.е. не видя этих предметов.

Это упражнение намеренно построено нами так, чтобы создать аналогию между логической операцией, совершаемой многократно в жизни, и операцией вычисления.

Первое умозаключение: если были какие-либо два разных предмета, а затем один из них вынули, то останется, несомненно, другой предмет.

Второе умозаключение: если были два множества (соответственно из 3 и 2 предметов), а затем мы отделили первое множество (состоящее из 3 предметов), то там останется второе множество (из 2 предметов).

Анализируя второе умозаключение, мы видим, что в нем отсутствует результат сложения (5 предметов).

Понятно теперь, что при решении примера  $5 - 3 = \square$  важно разбить число 5 на два слагаемых, одно из которых равно 3:

$$\square + 3 = 5$$

После удаления множества из трех предметов в ящике останется множество из двух предметов:

$$5 - 3 = 2$$

Чтобы достичь цели обучения обобщениям и использования перехода к свернутым формам умозаключений, чтобы не допустить преждевременной автоматизации вычислений, полезно применять счет группами.

Счет группами как кратчайший и основной прием вычислений является и наиболее ценным в образова-



тельном отношении, и он постепенно становится основным при изучении действий над числами.

Пусть решен пример:  $7 + 2 = \square$ .

К семи прибавить два; к семи прибавим один, получится восемь; к восьми прибавим один, получится девять. К семи прибавим два, получится девять.

После решения этого примера мы рассматриваем сразу обратный пример на вычитание двух:  $9 - 2 = \square$ .

Из девяти вычесть один, получится восемь; из восьми вычесть один, получится семь. Из девяти вычесть два, получится семь.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: если при решении первого примера были использованы связи:  $7 + 1 = 8$ ;  $8 + 1 = 9$ , то в решении второго примера проявляются соответствующие обращенные ассоциации, но в иной последовательности:  $9 - 1 = 8$ ;  $8 - 1 = 7$ .

Схематически эти четыре промежуточные операции образуют как бы замкнутый цикл в рассуждениях (рис. 7).

Тем самым достигается слияние двух взаимно обратных действий как бы в двуединую операцию:

$$7 + 2 = 9 \quad 9 - 2 = 7$$

Отсюда вытекает следствие: взаимосвязь более сложных вычислительных или логических операций основана на аналогичном попарном родстве (близости) элементарных операций, посредством которых выполняется пара «сложных» операций.

Или: явное противопоставление сложных понятий основано на неявном (неосмысленном) противопоставлении более простых понятий.

Пусть решен пример присчитыванием группами:

$$5 + 3 = 5 + 1 + 2 = 6 + 2 = 8$$

К пяти прибавить один, получится шесть; к шести прибавить два, получится восемь. Значит, к пяти прибавить три, получится восемь.

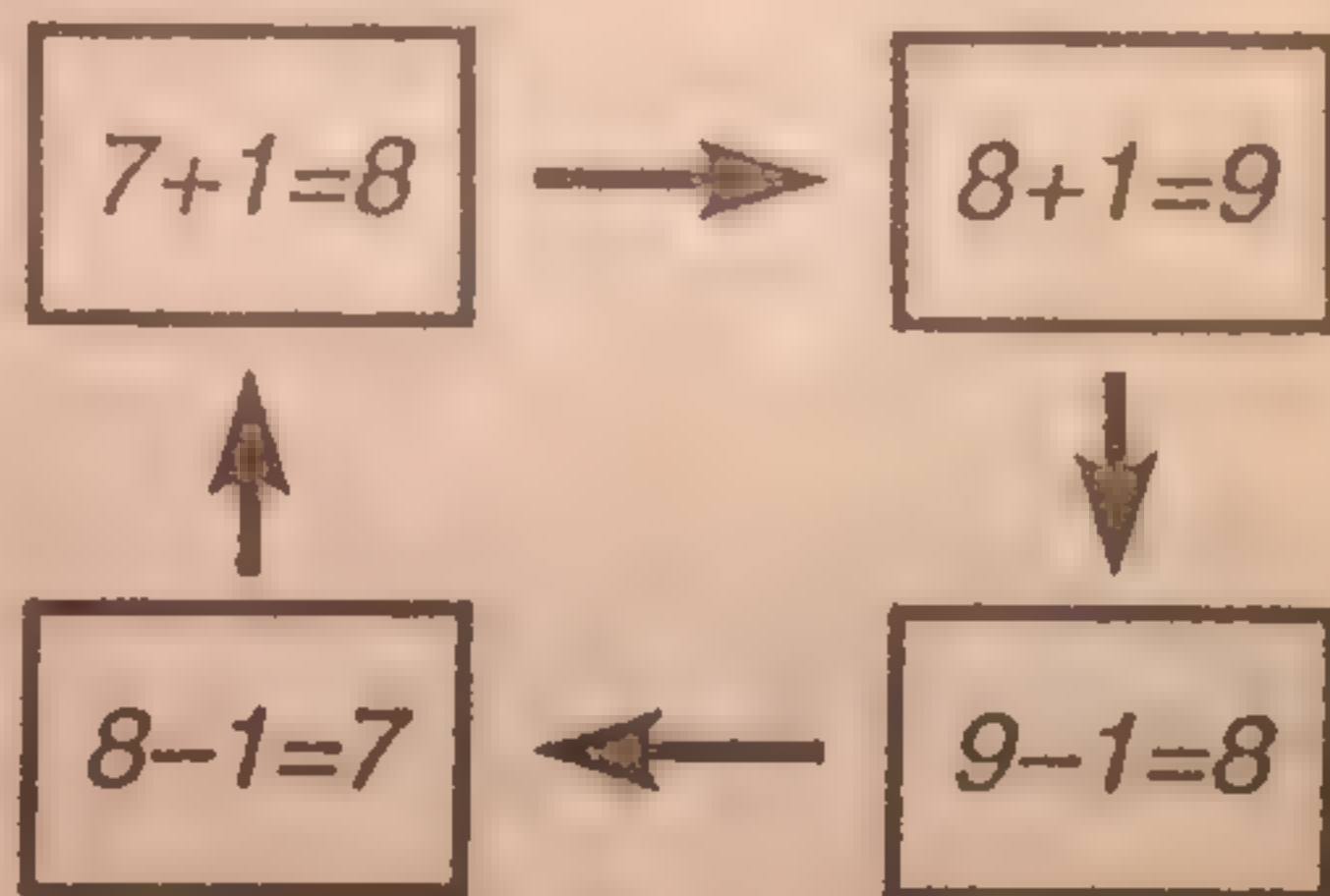


Рис. 7.



Если сразу же вслед за этим примером предложить соответствующий пример на вычитание:  $8 - 3 = 7 - 2 = 6 - 1$ , то решение его сведется к обращению процессов, только что протекших при выполнении сложения.

Решение примера  $8 - 3 = \square$  вслед за примером  $5 + 3 = \square$  выглядит так:

из восьми вычесть два, получится шесть; из шести вычесть один, получится пять. Значит, из восьми вычесть три, получится пять\*.

При методе противопоставления учащийся сам составляет второй пример, исходя из решенного примера на сложение.

Условие второго примера он не получил готовым, а добыл его сам из условия первого примера: взаимосвязь между компонентами, роль их в двух примерах усваивается детьми поневоле в процессе сравнения, пронизывающего весь двуединый процесс сложения и вычитания.

Идя систематически по пути одновременного изучения сложения и вычитания, мы опасались одного возможного отрицательного момента: мы ожидали, что будет происходить нежелательное, преждевременное «свертывание» операций. Мы ожидали, что после решения примера  $5 + 3 = 8$  двумя операциями ( $5 + 1 = 6$ ;  $6 + 2 = 8$ ) при вычитании трех из восьми ученик будет говорить и писать сразу результат без промежуточных операций:

$$8 - 3 = 5$$

Нам казалось, что подробное решение исходного примера на сложение  $5 + 3 = 5 + 1 + 2 = 6 + 2 = 8$  будет в мышлении ученика свертываться раньше времени, что может отрицательно сказаться на сознательности усвоения материала.

Неожиданностью для нас явилось то, что такое нежелательное преждевременное «свертывание» операций

\* Уместно следующее толкование рассматриваемого примера. Если при сложении  $5 + 3 = 5 + 1 + 2 = 6 + 2$ ... последней операцией было сложение  $6 + 2$ , то, естественно, при выполнении обратного действия  $8 - 3$  первой операцией будет не  $8 - 1 = 7$ , а  $8 - 2 = 6$ .



возникает очень редко, причем только у отдельных учеников.

Вот запись беседы на уроке.

Был решен пример:  $6 + 3 = 9$ .

$$6 + 3 = (6 + 2) + 1 = 8 + 1 = 9$$

Учитель (ведет беседу с сильным учеником). Прочитай решенный пример:  $6 + 3 = 9$ .

Ученик. К 6 прибавить 3, получится 9.

Учитель. Составь пример на вычитание. (Дети приучены вычитать из суммы второе слагаемое.)

Ученик. Из 9 вычесть 3, получится ... (пауза).

Учитель (прерывает). Решай пример дальше. Как ты будешь решать?

Ученик. Из 9 вычесть 1, получится 8; из 8 вычесть 2, получится 6.

$$9 - 3 = 6$$

Учитель. Прочитай решенный пример.

Ученик. Из 9 вычесть 3, получится 6.

Учитель. А мог бы ты сразу решить пример?

Ученик. Я знал сразу: получится 6.

Учитель. Почему же ты не сказал?

Ученик. Сразу нельзя говорить, надо решать. (!)

Очевидно, мысль ученика при решении обратного примера на вычитание по существу направлена не на получение результата, который известен, а на заполнение пробелов между условием и результатом:

$$9 - 3 = \dots = 6$$

Для сильного ученика интересен не столько результат (6), который ему известен из предыдущего примера, сколько рассуждения, которые восстанавливаются с конца; заполнение пробелов схематически выглядит так:

$$\begin{array}{rcl} 9 - 3 & = & 6 \\ \square - \square & = & 6 \\ \square - 2 & = & 6 \\ 8 - 2 & = & 6 \\ \square - \square & = & 8 \\ 9 - 1 & = & 8 \end{array}$$



Это заполнение пробелов происходит во внутренней речи, а при ответе процесс развертывается в обратном направлении:

$$9 - 1 = 8; \quad 8 - 2 = 6; \quad 9 - 3 = 6$$

Если сильный ученик находит цель в рассуждениях, в обоснованиях, то внимание слабого ученика зачастую бывает приковано к результату.

Учитель (обращается к слабому ученику). Прочитай решенный пример:  $6 + 3 = 9$ .

Ученик. К 6 прибавить 3, получится 9.

Учитель. Составь пример на вычитание.

Ученик. Из 9 вычесть 3.

Учитель (прерывает). Решай пример дальше. Как ты будешь решать?

Ученик. Получится 6.

Учитель. Ты сказал ответ. Как же надо решать пример?

Ученик. Из 9 вычесть 3, получится 6.

Учитель. Вспомни, как мы к числу 6 прибавляли число 3. Иди к счетам.

Ученик (считает на счетах). К 6 прибавить 2, получится 8. К 8 прибавить 1, получится 9.

Учитель. А теперь из числа 9 вычти число 3. Сколько же мы сначала вычтем?

Ученик. Сначала вычтем 1, потом вычтем 2. Из 9 вычесть 1, получится 8.

Учитель. А дальше как будешь вычитать?

Ученик. Из 8 вычесть 2, получится 6.

Анализ решения примера слабым учеником говорит о том, что он затруднялся решить именно обратный пример на вычитание, так как не сумел развернуть в обратном порядке процесс решения примера на сложение.

Он не удержал в памяти опорные числа 2 и 1, которые прибавлялись поочередно ( $6 + 2 = 8$ ,  $8 + 1 = 9$ ), а теперь должны быть вычтены поочередно, но в другом порядке (1, потом 2).

Лишь восстановление исходной цепи рассуждений учителем помогло первокласснику самому открыть способ вычитания трех.

Характерной особенностью предлагаемой методики является то, что при преобразовании примера на сло-



жение ( $6 + 3 = 9$ ) в пример на вычитание ( $9 - 3 = 6$ ) числовой состав остается неизменным (9, 3, 6), но изменяется форма связи между этими числами.

Таким образом, при переходе к вычитанию подвергается изменению лишь одна сторона процесса — способ вывода одного соотношения из другого, метод преобразования одного суждения в другое. Короче говоря, здесь наиболее выпукло выступает логическая сторона вычислительных операций.

Мы выше описали порядок изучения действий, причем исходным действием было сложение, а вычитание — производным.

Важно при повторении вести работу над четверкой примеров, исчерпывающих все возможные связи между тремя данными числами.

Пусть решен пример:

$$7 + 2 = 9$$

Учащиеся составляют новый пример на сложение с тем же ответом, поменяв местами слагаемые:

$$2 + 7 = 9$$

Далее к каждому примеру составляется обратный пример на вычитание и в тетрадях записывается четверка примеров в таком порядке:

$$\begin{array}{ll} 7 + 2 = & 9 \\ 2 + 7 = & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 9 - 2 = 7 \\ 9 - 7 = 2 \end{array}$$

Впоследствии четверку примеров можно решать в другой последовательности: сначала записать левый столбик из двух примеров на сложение (применение переместительного закона); затем справа — два соответствующих примера на вычитание.

С таким заданием учащиеся могут справиться и дома: учитель на доске пишет три числа подряд и предлагает внизу составить четыре примера (два — на сложение, два — на вычитание).

Решение выглядит так:



6, 4, 10

$$6 + 4 = 10$$

$$4 + 6 = 10$$

$$10 - 4 = 6$$

$$10 - 6 = 4$$

Затем можно ввести варианты заданий, изменив обычный порядок составления примеров:

6, 4, 10

$$\begin{array}{l} \square + \square = \square \\ \square - \square = \square \\ \square + \square = \square \\ \square - \square = \square \end{array}$$

7, 1, 8

$$\begin{array}{l} \square - \square = \square \\ \square - \square = \square \\ \square + \square = \square \\ \square + \square = \square \end{array}$$

3, 6, 9

$$\begin{array}{l} \square - \square = 6 \\ \square + 3 = \square \\ \square + \square = \square \\ \square - \square = 3 \end{array}$$

При изучении первого десятка вводятся названия компонентов сложения и вычитания.

Заучиваются следующие правила:

Число, из которого вычитают, называется уменьшаемым.

Число, которое вычитаем, называется вычитаемым.

Число, которое получается при вычитании, называется разностью.

Для усвоения названий компонентов при сложении и вычитании целесообразно запоминать их парами (рис. 8).

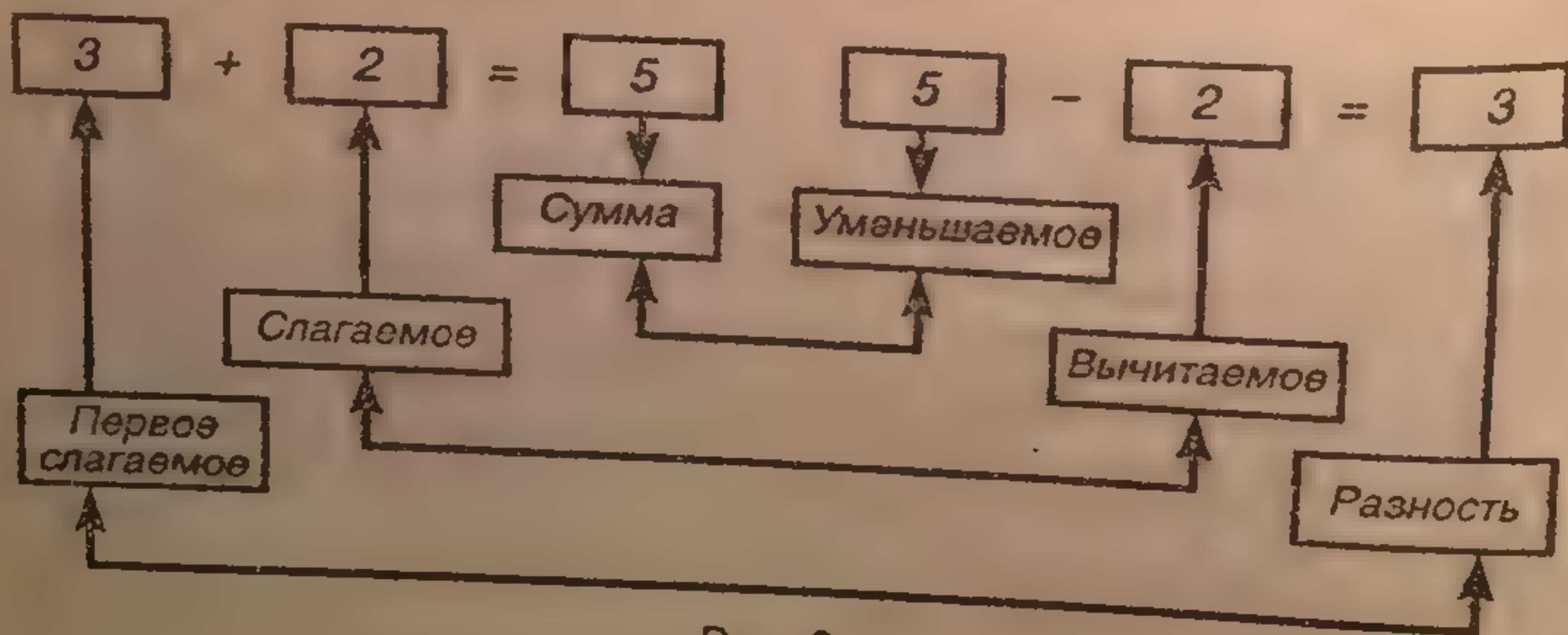


Рис. 8.



Надо обратить внимание детей на то, что при преобразовании сложения ( $4 + 2 = 6$ ) в вычитание ( $6 - 2 = 4$ ) сумма становится уменьшаемым (6); одно слагаемое становится вычитаемым (2), другое — разностью (4).

Для закрепления названий компонентов сложения и вычитания уместно предлагать следующие задания:

I. а) Даны слагаемые 5 и 2. Как называется результат сложения? Чему равна сумма?

б) Преобразовать предыдущий пример на сложение в пример на вычитание. Во что преобразуется при этом сумма чисел, равная 7?

II. а) Уменьшаемое 6, вычитаемое 5. Как называется результат вычитания? Чему равна разность?

б) Преобразовать предыдущий пример на вычитание в пример на сложение. Во что преобразуется при этом уменьшаемое 6?

## 7. Решение деформированных примеров

При изучении сложения и вычитания в пределах первого десятка оправдывается широкое использование деформированных примеров, в которых один из компонентов восстанавливается по результату и другому компоненту.

Учитель составляет на доске из разрезных цифр пример:

$$6 + \square = 9$$

На первых порах вместо буквы  $x$  удобнее в этих примерах писать клетку. Ученик находит искомое число и записывает его вместо клетки или внутри нее.

Учитель. Как решить данный пример? Для этого надо пробовать. К 6 прибавить 1. Сколько получится?

Ученик. К 6 прибавить 1, получится 7.

Учитель. Какое же число должно получиться?

Ученик. Должно получиться 9. Прибавим 3. К 6 прибавить 3, получится 9.

Учитель. Составь решенный пример из разрезных цифр.

Ученик составляет пример:

$$6 + 3 = 9$$



Проанализируем процесс решения данного примера. Во-первых, этот пример качественно новый по сравнению с обычными примерами, решавшимися раньше.

Если при решении примера вида  $6 + 3 =$  используется единичная связь «шесть да три — девять», то решение обратного примера ( $6 + \square = 9$ ) основано на использовании множества связей:

$$6 + 1 = 7, \quad 6 + 2 = 8, \quad 6 + 3 = 9$$

Во-вторых, ход мысли при решении прямого примера  $6 + 3 =$  направлен от слагаемых к сумме, а при решении деформированного примера  $6 + \square = 9$  — от суммы к слагаемому.

В-третьих, решение первого примера осуществляется без проб, решение же второго примера осуществляется в форме поисков.

В психологическом плане решение первого примера не содержит операции сравнения и поправок (коррекции), а решение второго примера основано на многократном сравнении промежуточных результатов с искомым результатом ( $7 < 9$ ;  $8 < 9$ ;  $9 = 9$ ) и соответственно вносимых коррекций (поправок) после каждой операции:  $6 + 1 = 7$ ;  $7 < 9$  — не хватает; надо прибавить не 1, а 2:  $6 + 2 = 8$ ;  $8 < 9$  — не хватает; прибавим 3;  $6 + 3 = 9$ , что и должно быть.

Очевидно, решение второго примера более содержательно в психологическом отношении, чем первого, так как при его решении возникает трудность, активизирующая мышление, а в процессе решения учащийся совершает новые виды логических операций (сравнение, пробу и др.).

Аналогично рассмотренному решается пример, в котором отсутствует первое слагаемое:  $\square + 3 = 9$ .

Решение примера во всех трех видах ( $6 + 3 = \square$ ;  $6 + \square = 9$ ;  $\square + 3 = 9$ ) позволяет увидеть одно содержание в разных формах. Для последующего изучения математики и развития мышления этот момент — варьирование всех возможных форм упражнений по изучаемому вопросу — имеет важное значение.



Нельзя не видеть, что решение каждого из трех примеров совершается существенно разными ходами мысли.

Исходная мысль, что «6 да 3, будет 9», превращается в следующие: «3 да 6, будет 9», «9 — это 6 (данное число) и 3 (найденное число)», «9 — это 3 (данное число) и 6 (найденное число)».

Деформированные примеры на вычитание предлагаются двух видов:

а) с неизвестным уменьшаемым:

$$\square - 6 = 3$$

б) с неизвестным вычитаемым:

$$9 - \square = 3$$

Первый пример читается учителем так: «Из какого числа надо вычесть 6, чтобы осталось 3?» или так: «Вычитаемое 6, разность 3, найти уменьшаемое».

Второй пример читается так: «Какое число надо вычесть из 9, чтобы осталось 3?» или так: «Уменьшаемое 9, вычитаемое неизвестно, разность 3, найти вычитаемое».

К таким различным формам чтения одного и того же деформированного примера нужно приучать постепенно и детей.

### **8. Можно ли предлагать учащимся неверно решенные примеры?**

Довольно сложную и в то же время посильную деятельность совершают учащиеся, когда им предлагают заведомо неверно решенные примеры. Об использовании неверно решенных задач, примеров в дидактике существуют две точки зрения:

Одни считают недопустимым показывать учащимся вообще что-либо неверное. Мотивируют это тем, что восприятие неверных соотношений будет причиной и неверных воспроизведений.

Другие считают, вслед за К. Д. Ушинским, что в мыслительной деятельности воспроизведение всегда связано с анализом; воспроизведение есть сознательный



акт, а не слепое, механическое копирование воспринятого. Известно, что К. Д. Ушинский считал возможным использовать как объект анализа заведомо неверные написания слов, с тем чтобы учащиеся исправляли неверное написание на правильное.

При обучении арифметике иногда целесообразно предлагать учащимся неверно решенные примеры, например, такие, в которых даны все числа и показаны действия. Требуется лишь заменить одно число другим так, чтобы решение стало правильным.

Можно среди правильно решенных примеров дать детям неверно решенные:

$$\begin{array}{ll} 5 + 3 = 8 & 9 - 5 = 3 \\ 7 - 2 = 4 & 6 + 3 = 9 \quad \text{и т.д.} \end{array}$$

Ученик, нашедший неверные равенства, заменяет знак равенства на знак неравенства:

$$7 - 2 \neq 4$$

Задания подобного вида вырабатывают у школьников навыки самоконтроля.

Еще больше активности мышления требует решение такого примера, в котором числа подобраны неверно, к тому же требуется восстановить пропущенный знак действий.

Учитель записывает на доске пример с пропущенным знаком:

$$5 \Delta 1 = 7$$

Затем он предлагает ученикам соединить числа 5 и 1 знаком действия так, чтобы получился правильно решенный пример.

Ученик пробует: «5 — 1» — и говорит: «Мало». Пробует: «5 + 1» — опять мало и исправляет второе слагаемое на 2:

$$5 + 2 = 7$$

Учитель обращается к ученикам с другим заданием: «Теперь подберите знак действия в следующем примере:  $4 \Delta 1 = 3$ ».

Анализ решения на исправление позволяет выявить следующее:



а) Наличие более сложных цепей умозаключений: если решение обычного примера ( $5 + 2 = \square$ ) выполняется в форме одного суждения: «Пять да два — семь», то анализ «невозможного» примера  $5 \Delta 1 = 7$  основывается на нанизывании одного суждения на другое, на неизбежный переход от одного суждения к другому.

Иначе говоря, подобные задания учат рассуждать.

В последнем случае учащиеся овладевают умозаключениями, состоящими из нескольких простых суждений:

«Попробуем знак сложения. Пять да один — шесть; должно быть семь, не получается; попробуем второй знак, знак вычитания. Из пяти вычесть один, получится четыре».

Должно получиться число семь. У меня же получилось: шесть — в первом случае, во втором случае — четыре. К семи ближе шесть. Значит, надо поставить знак сложения. Но тогда надо заменить второе слагаемое другим. Семь состоит из пяти и двух. Значит, число 1 заменим числом 2.

Итак, пример должен быть таким:  $5 + 2 = 7$ .

Из психологии известно, что процесс мышления не совершается в такой подробной форме; многие члены возможного рассуждения свертываются, и притом тем больше, чем выше уровень мыслительной деятельности учащегося.

Во внешней речи это свертывание выглядит так:

$5 - 1 = 4$ ;  $4 < 7$ ; попробуем плюс;

$5 + 1 = 6$ ;  $6 < 7$ ; возьмем два:  $5 + 2 = 7$ .

б) При решении учащимися таких примеров выявилась и другая психологическая особенность.

В тех случаях, когда выбирался знак сложения ( $2 + 8 = 9$ ), исправлялся не результат (число 9), а меньшее слагаемое (число 2) заменялось на 1.

Когда выбирался знак вычитания ( $6 - 2 = 3$ ), то, наоборот, неправильная разность ( $6 - 2 = 3$ ) исправлялась на правильную ( $6 - 2 = 4$ ).

Нетрудно выяснить эту причину: в сознании учащихся возникают ассоциации, основанные не на действиях, а на понимании состава числа, а именно; какой бы пример ни был дан, ученик подвергает разложению на слагаемые большее число. Так, в примере  $8 + 2 = 9$  ученик



мысленно останавливается прежде всего на числе 9 и затем это число разлагает на два слагаемых, одно из которых есть 8 (большее из двух оставшихся), поэтому второе слагаемое 2 исправляет на 1.

В примере  $6 \Delta 2 = 3$  ученик число 6 разлагает на два слагаемых (2 и 4) и поэтому разность 3 исправляет на 4.

Предлагая рассмотренные выше примеры, мы не указывали, какой компонент должен быть исправлен; предъявлялось лишь краткое требование: подобрать знак в примере; если нужно, заменить числа так, чтобы пример был решен правильно.

Осуществляя выбор в этих примерах, ученик руководствуется довольно сложной операцией внесения поправок (коррекции).

Учитель пишет на доске пример:

$$6 \Delta 2 = 10,$$

вызывает к доске учащегося и предлагает ему подобрать знак и решить пример. Ученик заменяет треугольник знаком «плюс»:

$$6 + 2 = 10$$

Учитель. Почему ты выбрал знак «прибавить», а «не вычесть»?

Ученик. Потому что 10 больше 6.

Ясно, что ученик, не производя вначале действия (сложение), сравнивает все три числа между собой и, обнаружив, что результат больше каждого из слагаемых 6 и 2, догадывается написать знак (+).

Без специального указания о необходимости проверки ученик иногда не видит неправильности примера; выбор знака есть обособившаяся мыслительная операция, в которой отражается результат сравнения чисел:

«Если в примере  $x \Delta y = p$  оказывается, что  $p > x$  и  $p > y$ , то между  $x$  и  $y$  должен стоять знак увеличения «плюс».

Лишь после выбора знака проверяют компоненты.

Учитель. А правильно ли решен пример? Проверь.

Ученик. 10 минус 6 будет 4, а тут написано 2 (исправляет 2 на 4).



Аналогичная картина обнаруживается и при выборе знака «минус». Учитель пишет на доске пример:

$$6 \Delta 2 = 3$$

Подберите знак, составьте правильный пример.

Ученик уверенно читает: «Из шести вычесть два, получится ... три» — и пишет знак вычитания.

$$6 - 2 = 3.$$

Учитель. Почему ты выбрал знак «вычесть», а не «прибавить»?

Ученик. Три меньше. Надо вычесть.

Очевидно, здесь возникает ассоциация «три меньше шести — знак «вычесть». Затем школьник исправляет пример:

$$6 - 3 = 3$$

Мы видим, что работа над неверно решенными примерами приучает пользоваться более сложными рассуждениями, чем те, которые имеют место при выполнении обычных заданий (левая часть задана, требуется найти правую часть равенства).

## 9. Решение примеров, в которых надо определить знак действия и неизвестный компонент

Дальнейшим усложнением структуры неопределенных примеров является предложение их в форме, когда неизвестны знак действия и одно из чисел:

$$8 \Delta \square = 2$$

$$\square \Delta 3 = 6$$

$$6 \Delta \square = 9$$

$$\square \Delta 7 = 2$$

В этих примерах ученик сначала подбирает знак на основе сравнения, а затем находит отсутствующий компонент.

Решая пример:  $8 \Delta \square = 2$ , ученик рассуждает про себя примерно так: восемь больше двух; значит, знак «вычесть»: восемь состоит из двух (данное число) и ... шести (неизвестное число); значит, пример такой:



$$8 - 6 = 2$$

Рассуждение ученика при решении четвертого примера:

$$\square \Delta 7 = 2$$

Семь больше двух; если прибавить, то получится больше семи, у нас же в ответе два, а два меньше семи; значит, знак будет «вычесть». Из чего вычесть? Семь и два будет девять; значит, вычесть из девяти:  $9 - 7 = 2$ .

Вообще при решении подобных примеров большее затруднение у детей вызывают те упражнения, в которых первый компонент оказывается неизвестным (здесь, так сказать, самый вход в упражнение, начало операции неопределенно, поэтому не сразу устанавливается кратчайший путь рассуждений, кратчайшая цепь ассоциаций, приводящая к ответу).

Каждый из примеров ( $9 \Delta \square = 2$ ;  $6 \Delta \square = 9$ ) имеет одно-единственное решение; к тому же в этих же примерах дан первый компонент, поэтому они решаются без затруднений.

Учитель. Решите пример:  $8 \Delta \square = 6$ .

Ученик, немного подумав, пишет:  $8 - 2 = 6$ .

Учитель. Почему ты выбрал знак «минус», а не «плюс»?

Ученик. Тогда результат станет еще больше.

Очевидно, ученик сравнил по величине числа 8 и 6 и, обнаружив, что  $8 > 6$ , остановился на знаке «минус».

Дальше уже он дописывает найденное вычитаемое:  $8 - 2 = 6$ .

После небольшого количества упражнений вырабатывается более свернутый прием решения, когда наибольшее число можно сразу разложить на слагаемые:

Предложен пример:

$$8 \Delta \square = 3$$

Ученик сразу пишет 5 (знак «минус» еще не написан):

$$8 \Delta 5 = 3$$

Учитель. Почему получилось 5?



Ученик. 5 и 3 будет 8 (затем пишет знак действия:  $8 - 5 = 3$ ). Интересны также пары примеров, имеющие при одинаковой исходной форме два решения.

Учитель предлагает два примера:

$$\square \Delta 2 = 4$$

$$\square \Delta 2 = 4$$

Учащийся быстро находит первое решение:

$$2 + 2 = 4$$

Учитель. Найди еще одно решение.

Ученик. Больше нет!

Учитель. Ты нашел решение примера на сложение. Попробуй составить второй пример на вычитание.

Ученик. Я знаю:  $6 - 2 = 4$ .

Такие парные примеры оказываются полезными для уяснения соотношений, вытекающих из расположения чисел в числовом ряду: числа 2, 4, 6 отстоят друг от друга на один и тот же промежуток, равный двум единицам.

После анализа решения первой пары примеров предлагаются аналогичные примеры, которые решаются значительно быстрее:

$$\square \square 3 = 4$$

$$\square \square 3 = 4 \quad \text{и т.п.}$$

Решение таких деформированных примеров включает в себя психологическую необходимость проверки найденного числа, так как процесс решения здесь начинается с допущения, что выбранное число есть искомое.

Сказанное выше доказывает дидактическую целесообразность использования деформированных примеров с самых первых шагов обучения, как одного из важнейших средств развития логического и математического мышления учащихся. Практика подтверждает, что деформированные примеры могут быть решены и при четырех входящих в них числах (три компонента и результат).

Например:  $7 + \square - \square = 5$        $\square + 3 + \square = 10$



## 10. Действия с нулем

Известно, что неумение оперировать с нулем нередко встречается даже у учащихся пятых классов. Причина этого явления заключается в том, что операциям над нулем не уделяется должного внимания в начальных классах\*.

Мы в своем эксперименте поставили целью выяснить возможность раннего расширения множества натуральных чисел, состоящих из 10 элементов (1, 2, ..., 10), до множества целых чисел, состоящих из 11 элементов (0, 1, 2, ..., 10). Наши данные говорят о том, что это нововведение вполне доступно учащимся. Такой шаг значительно расширяет и разнообразие числовых комбинаций, используемых в примерах\*\*.

При введении нуля удобно за исходное действие взять не вычитание, а сложение.

Учитель. Папа и мама дали Ване по конверту с марками. Сколько марок дали родители Ване?

Ученик. Мы не можем узнать, сколько марок дали Ване.

Учитель. Что же надо знать для ответа на вопрос задачи?

Ученик. Надо знать, сколько было марок в папином конверте и сколько было марок в мамином конверте.

Учитель. Послушайте продолжение задачи: «В папином конверте было 5 марок, а в мамином — 3 марки. Сколько всего марок дали Ване?»

Ученик. Ване дали 8 марок.

Учитель. Как ты решил?

---

\* Число нуль занимает особое место в математике. Введение этого числа связано со скачком в математическом мышлении. Интересно отметить, что в древнегреческой математике обходились без числа нуль. Благодаря открытию числа нуль индийскими математиками стала возможной позиционная запись чисел, величайшее изобретение человечества.

\*\* В опыте учительницы Л.К. Губаревой, работавшей по нашим опытным программам, нуль вводится уже после изучения числа 3 ( $3 - 3 = 0$ ;  $3 + 0 = 3$ ;  $0 + 3 = 3$ ;  $3 - 0 = 3$ ).



Ученик. К 5 маркам прибавил 3 марки, получил 8 марок.

Учитель. Решим новую задачу: «В папином конверте было 5 марок, а в мамином меньше, чем раньше, т.е. меньше, чем 3 марки. Подскажите, сколько же было марок в мамином конверте».

Ученик. В мамином было не 3 марки, а 2 марки.

Учитель. Правильно. В первый раз в мамином конверте было 3 марки, а сейчас 2 марки. Сколько же сейчас будет марок у Вани?

Ученик. У Вани будет 7 марок.

Учитель (изменяет задачу еще раз, подводя к ответу: «У Вани будет 5 марок + 1 марка = 6 марок»). Пусть теперь в папином конверте было 5 марок, а в мамином было еще меньше — одна марка. Сколько же марок было в мамином конверте?

Ученик (после обсуждения приходит к выводу, что в мамином конверте вообще не было марок). Ничего не было.

Учитель. Сколько же всего марок получил Ваня в последний раз?

Ученик. Ваня получил 5 марок.

Учитель. Раньше мы складывали два числа:

$$5 + 1 = 6 \text{ (марок)}$$

А последнюю задачу можно написать так:

$$5 + 0 = 5 \text{ (марок)}$$

«Ноль» — это значит «ничего», «нисколько»; когда говорят, было 0 марок, 0 рублей, это значит совсем не было марок, совсем не было денег.

Далее учитель предлагает решить еще несколько задач, сводящихся к выражениям:  $6 + 0 = 6$ ;  $0 + 7 = 7$  и т.д.

Мы обнаружили, что для закрепления понятия «ноль», выяснения его смысла полезны также деформированные примеры:

$$5 + \square = 5, \quad \square + 8 = 8$$

Ученики без труда справляются и с обобщением.

Учитель. Ученик допустил в диктанте в понедельник несколько ошибок (рисует квадратик); во вторник он



допустил вот столько ошибок (рисует второй квадратик).  
Как узнать, сколько всего ошибок он сделал?

Ученик. Сложить.

Учитель. А всего он сделал за 2 дня нуль ошибок:

$$\square + \square = 0$$

По сколько ошибок он сделал каждый день?

Дети после обсуждения приходят к выводу, что ученик не сделал ошибок ни в первый, ни во второй день:  
 $0 + 0 = 0$ .

К нулю прибавить нуль — получится нуль.

Можно также показать на задачах операцию вычитания нуля.

Учитель. На доске 3 кружочка. Я даю Пете 1 кружочек. Сколько у меня осталось? Запишите:  $3 - 1 = 2$ .

Снова составим задачу:

У меня 3 кружочка. Я даю Пете 2 кружочка. Сколько осталось? Запишите:  $3 - 2 = 1$ .

Наконец, составим последнюю задачу:

У меня было 3 кружочка. Я отдал Пете 3 кружочка. Сколько у меня осталось кружочков? (Нисколько.)

Записывается решенный пример:  $3 - 3 = 0$ .

Затем нужно сделать переход к структурно обратной задаче.

Учитель. У меня было 5 яблок (пишет число 5 на доске). Я отдал несколько яблок Пете. Как это записать?

(Пишет на доске:  $5 - \square = \quad$ .)

И осталось у меня 5 яблок!

(На доске появляется запись:  $5 - \square = 5$ .)

Бывает ли так? Сколько же я отдал яблок, если их столько же, сколько и осталось?

Приходят к выводу, что ничего не было отдано, т.е. отдано было нуль яблок:  $5 - 0 = 5$ .

Решается далее несколько задач, приводящих к выражениям:

$$7 - 7 = \square; \quad 6 - 0 = \square; \text{ и т.д.}$$

Роль нуля и в этом случае выявляется лучше всего при решении деформированных примеров:



$$\begin{array}{l} 8 - \square = 0 \\ \square - 9 = 0 \\ 6 - \square = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \square - 0 = 4 \\ \square - \square = 0 \end{array}$$

Впоследствии детям можно предложить примеры, при решении которых либо в окончательном, либо в промежуточном результате появляется нуль:

$$10 - 10 + 5 =$$

$$8 + 1 - 9 =$$

$$5 + 3 - 0 =$$

$$2 + 8 - 10 =$$

$$\square - 5 - 5 = 0$$

$$8 + \square - 9 = 0$$

$$5 + 3 - \square = 0$$

$$2 + 8 - \square = 0$$

Важно приучать учащихся к пониманию обобщенных буквенных формул с нулем (после изучения умножения и деления интересно сопоставлять эти формулы с действиями второй ступени с единицей):

$$a + 0 = a$$

Если к числу  $a$  прибавить число 0, то получится то же самое число  $a$ :

$$a - 0 = a$$

$$x - x = 0$$

Если из некоторого числа  $x$  вычесть то же самое число, то получится число 0:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

## 11. Введение понятий «равенство» и «неравенство»

В школьную программу введены понятия «неравенство» и «равенство» соответствующими символами «равно» ( $=$ ), «не равно» ( $\neq$ ), «больше» ( $>$ ), «меньше» ( $<$ ).

Вначале противопоставляются понятия «равно» и «не равно». Учитель предлагает задания, в которых требуется записать пары выражений (или прочитать, или составить таковые). Например:



$$7 = 7$$

Семь равно семи.

$$5 \neq 7$$

Пять не равно семи.

Решаются простейшие задачи на эти понятия:

У Вити было 7 карандашей, и у Вали тоже 7 карандашей. Ответьте, было ли у них карандашей поровну или не поровну. Как записать ответ?

Ответ. У Вити и Вали карандашей было поровну:

$$7 = 7$$

У Сергея было 5 тетрадей, а у Зины — 7 тетрадей. Ответьте, было ли у них тетрадей поровну или не поровну? Как записать ответ?

Ответ. У Сергея и Зины тетрадей было не поровну:

$$5 \neq 7$$

Для усвоения понятий «равно», «не равно» полезно предлагать деформированные записи (вместо клетки следует записать цифру, а вместо треугольника записать соответствующий знак сравнения):

$$\begin{array}{l} 8 \triangle 8 \\ \square = 3 \\ 5 = \square \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 \triangle 9 \\ \square \neq 3 \\ 7 \neq \square \end{array}$$

Аналогично предыдущему изучаются выражения со знаками «больше» ( $>$ ) и «меньше» ( $<$ ).

Чтобы запомнить эти знаки неравенства, следует обратить внимание на взаимное положение палочек в знаке: там, где палочки расходятся, записывают большее число, где палочки сходятся, записывают меньшее число (острый конец знака всегда обращен к меньшему числу).

Упражнения на эти понятия также целесообразно предлагать парами.

Написать пропущенные знаки:



1. а)  $5 + 1 \triangle 6$

Ответ:  $5 + 1 = 6$

б)  $5 + 4 \triangle 8$

Ответ:  $5 + 4 \neq 8$   
или  $5 + 4 > 8$

2. а)  $7 - 1 \triangle 6$

Ответ:  $7 - 1 = 6$

б)  $8 \triangle 9$

Ответ:  $8 < 9$

3. а)  $\square - 4 = 6$

Ответ:  $10 - 4 = 6$

б)  $\square > 6$

Ответ:  $7 > 6$

$8 > 6$

$9 > 6$

$10 > 6$  и т.д.

Особенно поучительны упражнения, в которых совершается переход от равенства к неравенству и от неравенства к равенству.

Приведем примеры заданий, которые также целесообразно рассматривать попарно, в противопоставлении:

1. Даны равенства. Из чисел этих равенств требуется написать неравенства:

а)  $6 + 2 = 8$

Ответ:  $6 < 8$

$2 < 8$

б)  $7 - 1 = 6$

Ответ:  $7 > 6$

$7 > 1$

2. Даны неравенства. Превратить их в равенства, добавив еще одно число:

$5 \neq 3$

а)  $5 = 3 \triangle \square$

Ответ:  $5 = 3 + 2$

$5 - 2 = 3$

$4 \neq 6$

б)  $4 = 6 \triangle \square$

Ответ:  $4 + 2 = 6$

$4 = 6 - 2$

Важно постепенно приучать учащихся к обобщенным записям, т.е. к записям с использованием букв:



$7 = 7$	$8 = 8$
$7 - 1 < 7$	$8 - 1 < 8$
$a - 1 < a$	

Если из числа вычесть какое-нибудь число, то оно уменьшится.

$9 = 9$	$6 = 6$
$8 + 2 > 9$	$6 + 2 > 6$
$x + 2 > x$	

Если к числу прибавить какое-нибудь число, то оно увеличится.

Изучение  
...ное знач  
...начальной  
...как извес  
...не осно  
...таблиц  
...Кроме то  
...ножения  
...ть в пред  
...голетне  
...Представ  
...учении д  
...е были  
...пределах  
...Противо  
...даёт ус  
...вращающ  
...ние чис  
...Дальше  
...одних  
...«Сло  
...1. Нуме  
...в п  
...таве с  
...ся ч  
...2. Сло  
...+ 3;  
...3. Сло  
...+ 2; 1



## Глава II

# ВТОРОЙ ДЕСЯТОК

Изучение действий в пределах второго десятка имеет важное значение для дальнейшего изучения математики в начальной школе.

Как известно, письменное и устное сложение и вычитание основывается в конечном счете на твердом знании таблицы сложения и вычитания в пределах 20.

Кроме того, первичное ознакомление с понятиями умножения (деления) целесообразно также осуществить в пределах двух десятков (это было подтверждено многолетней практикой).

Представляется естественным воспользоваться при изучении действий в пределах 20 теми навыками, которые были упрочены при обучении методом укрупнения в пределах первого десятка.

Противопоставление действий сложения и вычитания создает условия для одновременного изучения соответствующих пар задач, например, на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц.

Дальше будет изложена методика одновременного (на одних уроках) изучения следующих трех разделов по теме «Сложение и вычитание в пределах второго десятка»:

1. Нумерация и простейшие случаи сложения и вычитания в пределах 20 ( $10 + 7$ ;  $20 - 10$ ;  $18 - 10$ ;  $13 - 3$ ; в составе соответствующих примеров обязательно встречается число 10).

2. Сложение и вычитание без перехода через десяток ( $15 + 3$ ;  $3 + 15$ ;  $18 - 3$ ;  $18 - 5$ ).

3. Сложение и вычитание с переходом через десяток ( $9 + 2$ ;  $11 - 2$ ).



## 1. Совместное изучение нумерации и простейших случаев сложения и вычитания в пределах 20

При изучении нумерации чисел в пределах 20 целесообразно изобразить двузначное число в тетради в виде двух прямоугольников: слева — полный десяток, а справа — несколько единиц (рис. 9).

Зрительное сопоставление фигур, сравнение высот прямоугольников облегчает усвоение впоследствии со-

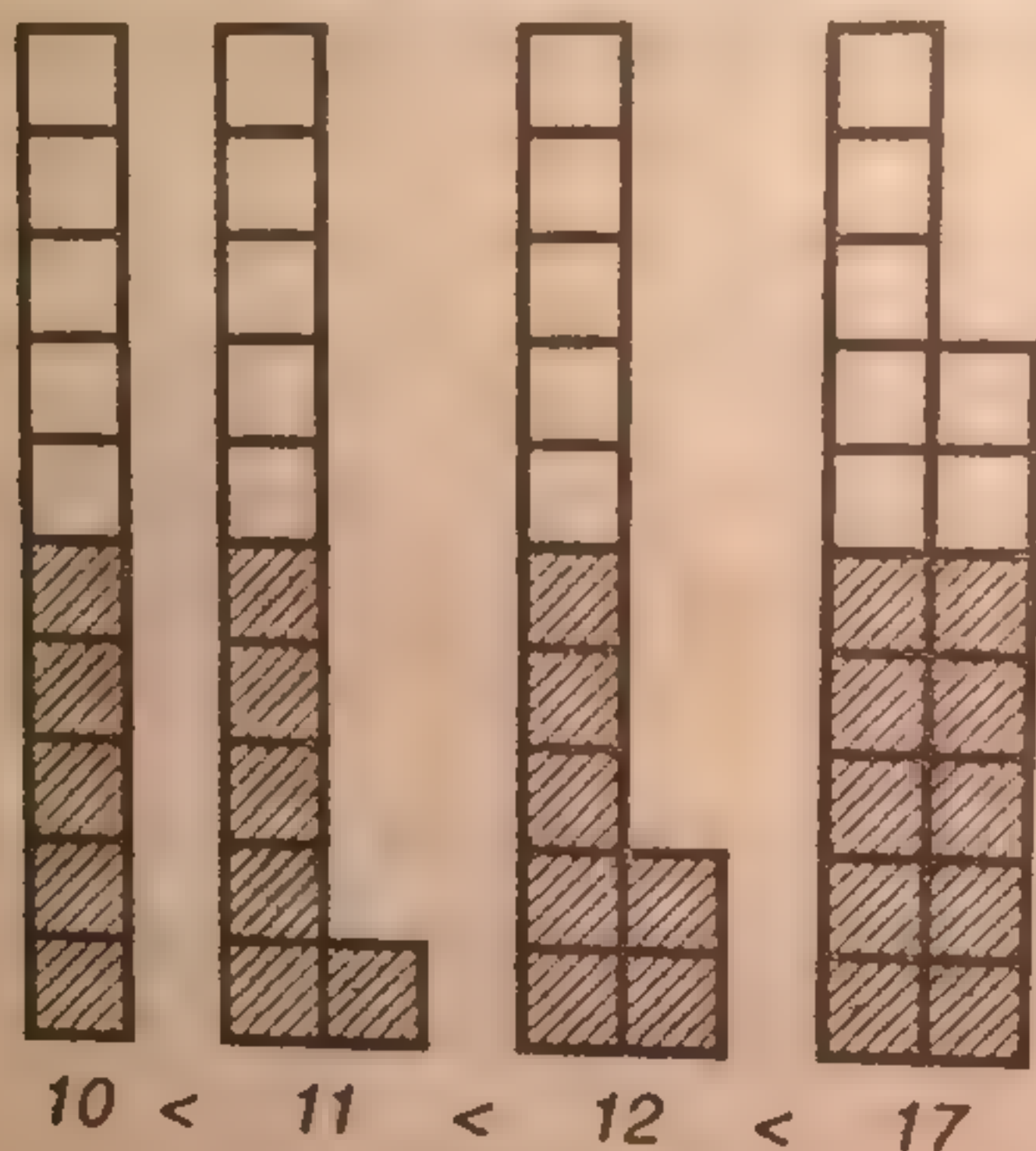


Рис. 9.

става двузначных чисел: слева пишется число десятков, а справа — число единиц.

Как подтвердилось на практике, запись чисел, называние их и откладывание на счетах надо рассматривать одновременно, намеренно создавая ситуацию для возникновения и закрепления двусторонних (прямых и обратных) ассоциаций вида «слово символ», «символ слово».

Кроме того, и упражнения по теме «Второй десяток» (как и по теме «Первый десяток») надо строить так, чтобы работа совершалась в символическом и конкретном планах одновременно, на одних и тех же уроках.

Объяснение материала ведется так: учитель вызывает двух учеников к доске и счетам. Остальные работают на партах с пучком-десятком и отдельными палочками-единицами (или на маленьких счетах).

Учитель. Ты, Петя, будешь откладывать числа на счетах, а ты, Витя, будешь писать на доске.

«Десять». Дети, как пишется это число? Отложите это число на счетах.

«Одиннадцать». Напишите это число, отложите его на счетах. Прибавляйте по одному и считайте подряд до двадцати. Вычитайте по одному и считайте назад до десяти.



учитель. Отложите 17. Из каких чисел состоит это число?

Ученик. Число 17 состоит из 1 десятка и 7 единиц. (Учащиеся повторяют фразу и соответственно показывают 1 пучок и 7 отдельных палочек.)

Учитель. Какое число состоит из 1 десятка и 5 единиц? Отложите это число, напишите его. Назовите написанное число.

Какое число состоит из 6 единиц и 1 десятка? Отложите это число на счетах и напишите его. (Учитель молча пишет на доске число 18.) Отложите это число на счетах! Каков состав этого числа? Назовите это число.

Обратим внимание на последовательность вопросов в данном рассуждении: название числа должно появиться в конце рассуждения, сначала обозреваем символы, знаки; потом произносим название числа; такое изменение порядка рассуждений содействует упрочению двусторонних связей в мышлении учащихся: символ  $\leftrightarrow$  слово.

Дальше. Учитель молча откладывает на счетах 16 косточек.

Учащиеся должны тоже молча написать соответствующее число.

Учитель. Где пишется десяток? Почему на втором месте стоит цифра 1? Что изображает цифра 1? Цифра 6?

Ученики. Десяток пишется на втором месте, считая справа налево. Цифра 6 означает 6 единиц, цифра 1 означает 1 десяток.

Когда будет выработан навык откладывания десятка на верхней проволоке счетов, тогда легче будет перейти к формированию новых связей в старших классах: десятки располагаются выше единиц (на второй проволоке снизу), сотни — выше десятков (на третьей проволоке) и т.д.

На втором уроке наряду с закреплением устной и письменной нумерации (и нумерации на счетах) изучаются одновременно сложение однозначных чисел с круглым десятком и соответствующие случаи вычитания.

Учитель. Какое число состоит из 1 десятка и 5 единиц? Запишите это число. Отложите его на счетах.



Составьте это число из палочек. Как записать, что 15 состоит из 1 десятка и 5 единиц?

Дети записывают известным им способом (посредством знака «плюс») состав числа:  $10 + 5 = 15$ .

Учитель. Прочитайте эту запись слева направо и справа налево.

Ученик. К 10 прибавить 5, получится 15. 15 состоит из 5 единиц и 1 десятка.

Учитель. Как иначе можно составить число 15?

Ученик. К 5 прибавить 10, получится 15 ( $5 + 10 = 15$ ).

Учитель. Прочитай, из каких чисел состоит число 15.

Ученик. 15 состоит из 1 десятка и 5 единиц.

Благодаря применению метода противопоставления вычитание изучается одновременно со сложением.

Учитель. Прибавьте к 7 единицам 10 единиц или 1 десяток. Сколько получится?

Ученик. К 7 единицам прибавить 1 десяток, получится 17;

$$7 + 10 = 17$$

Учитель. Составьте и решите обратный пример на вычитание. (Ученик пишет справа пример на вычитание десятка из семнадцати:  $17 - 10 = 7$ .)

На доске и в тетрадях появляется запись двух примеров:

$$7 + 10 = 17 \quad 17 - 10 = 7$$

Учитель. Как можно иначе составить число 17?

Ученик. К 10 прибавить 7, получится 17.

На доске и в тетрадях появляется уже четыре примера, исчерпывающих связи между тремя числами 17, 10, 7:

$$\begin{array}{ll} 7 + 10 = 17 & 17 - 10 = 7 \\ 10 + 7 = 17 & 17 - 7 = 10 \end{array}$$

На первых порах решение примеров обязательно сопровождается работой на счетах.

На этом и на последующих уроках основным приемом закрепления становится решение (вперемежку с обычными примерами) деформированных и неопределенных примеров, при различном видоизменении (усложнении) структуры их.

Деформированные примеры:



$$10 + \square = 17$$

$$\square + 8 = 18$$

$$\square - 7 = 10$$

$$18 - \square = 8$$

$$4 + \square + 10 = 17$$

$$\square - 3 + 10 = 20$$

$$\square + 5 - 10 = 10$$

$$18 - 2 - \square = 6$$

Неопределенные примеры:

$$\square + \square = 17$$

$$\square + \square = 13$$

$$\square + 3 + \square = 18$$

$$\square - \square - 7 = 0$$

## 2. Сложение и вычитание в пределах 20 без перехода через десяток

Изучение данной темы выгодно также построить на основе противопоставления взаимно обратных примеров на сложение и вычитание.

Учитель (ставит на полку слева 1 пучок, изображающий десяток, и справа 3 палочки). Сколько палочек отложено?

Ученик. Отложен 1 десяток и 3 единицы. Отложено 13 палочек.

Учитель (откладывает отдельно от первой группы предметов 5 палочек и говорит). К 13 палочкам прибавить 5 палочек. Сколько получится? Как будем прибавлять?

Ученики вначале затрудняются ответить на этот вопрос.

Учитель. Сначала были 1 пучок и 3 отдельные палочки (с ударением на слово «отдельные»). Теперь надо к ним прибавить 5 отдельных палочек. 5 отдельных палочек надо прибавить к чему? К пучку или также к отдельным палочкам?

Ученик. 5 отдельных палочек прибавим к 3 отдельным палочкам, получится 8 отдельных палочек.

Учитель. Мы получили 8 отдельных палочек. Что еще надо прибавить?

Ученик. Еще надо прибавить 1 пучок к 8 отдельным палочкам.



Учитель. Как иначе сказать? В 1 пучке — 1 десяток, 8 палочек — 8 единиц. 1 десяток да 8 единиц — сколько будет всего?

Ученик. К 1 десятку прибавить 8 единиц, получится 18.

Учитель. Прочитайте решенный пример.

Ученик. К 13 прибавить 5, получится 18.

Учитель записывает на доске решенный пример:

$$13 + 5 = 18$$

Учитель. А теперь решим другой пример. Мы к 13 прибавили 5. Пусть сначала было 5 отдельных палочек, (Переносит 5 палочек справа налево.) К ним надо прибавить 13 палочек, т.е. 1 пучок и 3 отдельные палочки. Сколько получится?

Ученик. К 5 прибавить 13, получится 18.

Учитель. Вы сказали ответ сразу. Это правильно: сколько было палочек в первом примере, столько и осталось. Там получилось 18, и здесь 18. Но как решать такие примеры? Расскажите подробно.

Ученик. К 5 отдельным палочкам прибавить 3 отдельные палочки, получится 8 отдельных палочек.

Учитель. Правильно. 8 отдельных палочек да еще был целый пучок, сколько это будет?

Ученик. 8 да 1 десяток, будет 18.

Учитель. А как сказать по-другому?

Ученик. К 5 прибавить 13, получится 18.

На доске появляются две записи одна под другой (общая сумма 18 записывается большими цифрами):

$$\begin{array}{r} 15 + 3 = \\ 3 + 15 = \end{array} 18$$

Решение других примеров сопровождается операциями на счетах.

Операции на счетах должны стать основным средством конкретизации при изучении действий в пределах 20, так как вычисление на счетах, кроме повышенной скорости выполнения операций, обладает и наглядностью, помогающей уяснить существо десятичной нумерации.

Учитель пишет на доске пример:



$$4 + 12 = 16$$

Ученик откладывает на нижней проволоке счетов 4 косточки (единицы надо откладывать на нижней проволоке). К ним прибавляет 12 косточек. Так как 12 состоит из 1 десятка и 2 единиц, то надо прибавить сначала десяток на верхней проволоке и 2 единицы на нижней проволоке.

Сколько всего получилось? (16)

К 4 прибавить 12, получится 16.

Далее ставится задача: как составить новый пример на сложение из тех же чисел (4 и 12), чтобы получить опять 16? Учащиеся подсказывают, что следует к 12 прибавить 4. Пример решается устно и затем демонстрируется на счетах.

На доске и в тетрадях записываются один под другим два примера:

$$\begin{array}{r} 4 + 12 = \\ 12 + 4 = \end{array} 16$$

Затем следует запись:

$$\begin{array}{l} 4 + 12 = 12 + 4 \\ A + B = B + A \end{array}$$

В дальнейшем все больше упражнений выполняется без наглядных пособий.

Противопоставление вычитания сложению в вычислениях без перехода через десяток не представляет особой трудности для учащихся, так как оно совершается по той же схеме, которая использовалась нами в предыдущих темах.

Решив пример  $11 + 6 = 17$ , учитель обращается к классу.

Учитель. Мы прибавили к числу 11 число 6. Теперь составьте пример на вычитание 6.

Ученик. Из 17 вычесть 6.

Учитель. Сколько же получится? (Пауза.)

Учитель. Из каких чисел состоит 17?

Ученик. 17 состоит из 1 десятка и 7 единиц.

Учитель. Нам надо вычесть 6 единиц. Как вычитать единицы: из десятка или из единиц?



Ученик. Из 7 единиц вычитать 6 единиц, получится 1 единица.

Учитель. Сколько же единиц осталось?

Ученик. Осталась 1 единица.

Учитель. Кроме того, остается 1 десяток. Сколько же всего осталось?

Ученик. Всего осталось 11. (1 единица и 1 десяток — это есть одиннадцать.)

Сравнение процессов решения примера  $11 + 6 = 17$  и следующего за ним сразу же примера  $17 - 6 = 11$  показывает, что оба процесса совершаются в теснейшей взаимосвязи.

Там и тут использовано поразрядное разделение числа 17 на 1 десяток и 7 единиц; там и тут использован принцип поразрядного вычитания: единицы прибавляются к единицам в первом случае и единицы вычитаются из единиц во втором случае. В решениях первого и второго примеров используются одни и те же числа (17, 6, 11; 10, 1, 7).

При изучении этой темы также рассматриваются четверки примеров, причем здесь интересно обратить внимание школьников на сходство и различие двух четверок примеров:

$$\begin{array}{l} 6 + 1 = 7 \quad 7 - 1 = 6 \quad 6 + 11 = 17 \quad 17 - 11 = 6 \\ 1 + 6 = 7 \quad 7 - 6 = 1 \quad 11 + 6 = 17 \quad 17 - 6 = 11 \end{array}$$

При решении любого примера следует обращать внимание на набор чисел, с которыми производятся операции разложения или соединения, и на логические операции, совершаемые над данными числами.

Действительно, при одновременном изучении сложения и вычитания также имеет место повторение одних и тех же логических операций при изменении состава чисел.

В самом деле, после решения первой пары примеров:

$$14 + 2 = 16 \quad \text{и} \quad 16 - 2 = 14$$

следует решение обязательно второй пары примеров:

$$15 + 2 = 17 \quad \text{и} \quad 17 - 2 = 15,$$

а за ней третьей пары:  $16 + 2 = 18$  и  $18 - 2 = 16$  и т.д.



Можно отметить, что предлагаемый прием основан на трех операциях:

1. Операция противопоставления вычитания сложению:

$$\text{переход от } 14 + 2 = 16 \text{ к } 16 - 2 = 14$$

2. Операция повторения сложения:

$$\text{переход от } 14 + 2 = 16 \text{ к } 15 + 2 = 17$$

3. Операция повторения вычитания:

$$\text{переход от } 16 - 2 \text{ к } 17 - 2$$

Таким образом, при использовании этого приема совершается сложная мыслительная деятельность:

а) преобразование одного примера в другой;

б) противопоставление двух действий;

в) повторение действий одного названия (сложения и вычитания).

Остановимся теперь на значении паузы, возникшей после вопроса учителя, в размышлениях школьника. Вспомним это место:

Был решен пример:  $11 + 6 = 17$ . Ученик составил новый пример:  $17 - 6$ . Ответ ему, вероятно, известен: 11. Но как его вычислить?

В этой паузе отражена характерная черта детского мышления, не раз отмеченная в психологической и методической литературе, а именно ее основательность, логичность.

Проводя обучение методом противопоставления операций, мы серьезно опасались и здесь дидактически нецелесообразного раннего свертывания умозаключений. Ожидали того, что учащиеся будут пытаться отделяться ответом такого рода:

Если к 11 прибавить 6, получится 17; то отсюда ясно, что если от 17 отнять 6, получится 11.

Вопреки нашим ожиданиям оказалось, что дети на первых порах (действия в пределах первого десятка) второй пример воспринимают как совершенно новый пример: они лишь знают способ преобразования формы первого примера ( $11 + 6 = 17$ ) в новую форму ( $17 - 11 = 6$ ); они понимают, что есть возможность составления новой числовой комбинации, но не понимают содержа-



тельной связи между исходным и преобразованным примерами, не догадываются о неизбежности ответа второго примера и каждый раз его подробно вычисляют.

Пусть учащийся вслед за решением примера  $11 + 6 = 17$  сразу без вычислений догадается об ответе обратного примера на вычитание:  $17 - 6 = 11$ .

Здесь происходит то же самое, что и при решении сложной задачи, когда ученик, ознакомившись с ее условием, не решая ее, смотрит в конец задачника и узнает ответ; однако он прекрасно понимает, что знание ответа есть нечто совершенно отличное от понимания пути решения, который должен привести к подсмотренному ответу.

Подобно этому, и первоклассник, составив обратный пример, решает его развернуто, т.е. заполняет пробел, лежащий между условием ( $17 - 6$ ) и ответом (11);  $17 - 6 = \dots = 11$ . Вопрос учителя: «Как это получить?» — ставит все на место, пробел заполняется  $17 = 10 + 7$ ;  $7 - 6 = 1$ ;  $10 + 1 = 11$ .

Аналогично рассматриваются и другие случаи сложения и вычитания без перехода через десяток, исходный пример преобразуется перестановкой слагаемых в новый пример на сложение (который записывается под этим примером) и в новый пример на вычитание однозначного числа из двузначного (записывается справа).

$$\begin{array}{ll} \text{Например: } 11 + 5 = 16 & 16 - 5 = 11 \\ & 5 + 11 = 16 \end{array}$$

После решения этого примера составляется недостающий пример четверки, т.е. новый пример на вычитание второго (двузначного) слагаемого из суммы и решается пример:  $16 - 11 = \dots$

Учитель. Как вычесть из 16 число 11? Из каких разрядных слагаемых состоит 16? Отложите на счетах! Из каких слагаемых состоит число 11?

Ученик. 11 состоит из 1 десятка и 1 единицы.

Учитель. Будем вычитать по порядку: сначала вычтем десяток. Есть ли в числе 16 десятки? Сколько десятков? (В числе 16 есть один десяток.) Из одного десятка вычтем один десяток — десятков уже не осталось. Какое же число осталось? Мы закончили решение?



Что еще надо вычесть? Десяток мы вычли. А теперь вычтем 1 единицу из 6 единиц. Сколько же осталось? Ответьте.

Ученик. Из 16 вычесть 11, получится 5.

Особое внимание целесообразно уделять решению примеров, когда сумма двух чисел равна 20 (и соответствующему случаю вычитания).

Учитель. К 16 прибавить 4 ( $16 + 4$ ). Как вычислить?

Ученик. 16 состоит из 1 десятка (откладывает на верхней проволоке счетов 1 косточку) и 6 единиц (откладывает 6 косточек на нижней проволоке). 4 единицы прибавим к 6 единицам, получится 10 единиц, или десяток. Здесь 1 десяток и здесь 1 десяток — всего будет 2 десятка, или 20. К 16 прибавить 4, получится 20.

Учитель. На счетах отложены 2 десятка; надо вычесть из них 4 единицы ( $20 - 4 = \square$ ). У нас отдельных единиц нет. Надо 1 десяток раздробить в 10 отдельных единиц. 1 косточку сбрасываем с верхней проволоки, а на нижней откладываем 10 косточек.

Ученик. В 1 десятке 10 единиц. Из 10 вычтем 4, получится 6. Да еще остался 1 десяток на верхней проволоке — будет всего 16. Из 20 вычесть 4, получится 16 (рис. 10).

При изучении действий в пределах 20 без перехода через десяток удобно пользоваться специально для этой цели сделанными «объемными» счетами (рис. 11).

Для изготовления этих счетов надо воспользоваться рамой от старых классных счетов; из арифметического ящика взять 10 кубиков (размером  $2 \times 2 \times 2$  (см), которые изобразят единицы; 10 брусков (размером  $20 \times 2 \times 2$  (см) изобразят десятки; 10 квадратных досок (размером

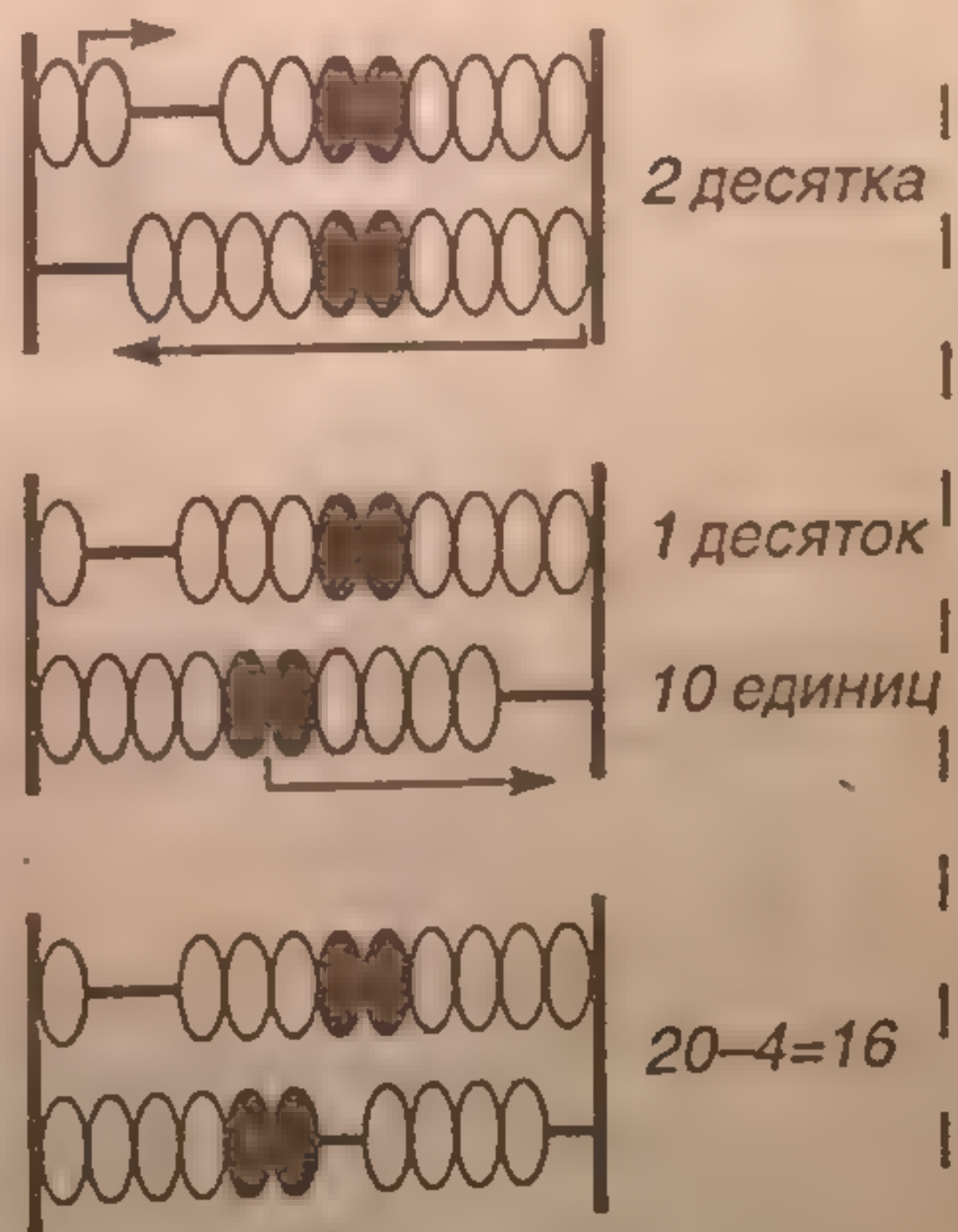


Рис. 10.



20 x 20 x 2 (см) изобразят сотни (можно вместо этого взять также один кубик размером 20 x 20 x 20 (см), который изобразит тысячу).

Эти детали просверливаются выше центра тяжести и надеваются на 4 проволоки. 2 средних кубика (2 бруска и 2 квадратные доски) закрашиваются в черный цвет, как на обычных счетах.

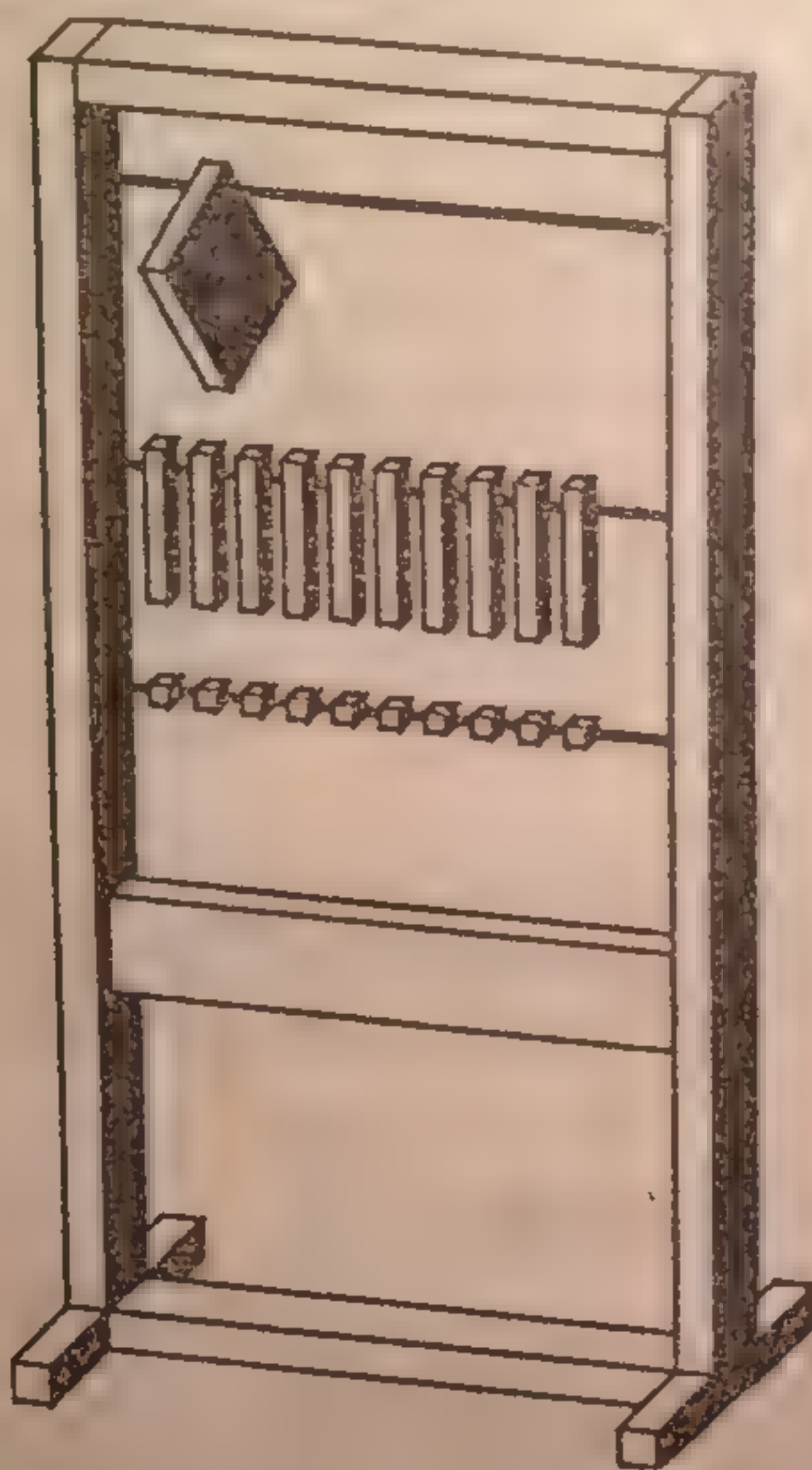


Рис. 11

Такие счеты наглядны и удобны при изучении нумерации чисел в пределах 1000, а также при выполнении сложения и вычитания. Для использования счетов в I — II классах достаточно воспользоваться тремя проволоками, на которые наде- ты 10 кубиков, 10 брусков и 1 квадратная доска.

Пусть требуется отложить на счетах число 16. Учащий- ся перемещает 1 брусок, изображающий десяток, и 6 отдельных кубиков, изо- бражающих единицы.

Если требуется из 16 вы- честь 13, то сначала вычита- ем десяток — перемещаем брусок вправо, потом из 6 кубиков вычитаем 3 куби- ка — остается 3 кубика. Из 16 вычесть 13, получится 3.

До пользования счетами надо показать учащимся, что 10 кубиков-единиц укладываются ровно на одном брус- ке-десятке, а 10 брусков как раз составляют одну доску- сотню.

После решения некоторого числа примеров с помо- щью пособий (в том числе и объемных счетов) необхо- димо перенести внимание на устное решение примеров без наглядных пособий.

При изучении любого раздела математики оправды- вает себя обращение задания, когда искомым выступает



либо пропущенное число ( $\square + 13 = 20$ ), либо знак пропущенного действия ( $18 \Delta 2 = 20$ ).

Отметим, что восстановление пропущенного знака даже при наличии всех остальных чисел (компонентов и результата) оказывается более сложным заданием, чем решение обычных примеров.

Интересны также упражнения на выяснение положения цифры 1, обозначающей десяток, и состава двузначного числа. В этих примерах требуется подписать цифру 1 к некоторым числам примера так, чтобы получить правильный результат:  $\square 7 + \square 2 = \square 9$ .

Возможны три варианта решения последнего задания:

$$\begin{aligned} 7 + 2 &= 9 \\ 17 + 2 &= 19 \\ 7 + 12 &= 19 \end{aligned}$$

А вот аналогичное задание на вычитание:

$$\square 8 - \square = \square 5$$

Решение этого неопределенного примера дает также три варианта ответа:

$$\begin{aligned} 18 - 3 &= 15 \\ 8 - 3 &= 5 \\ 18 - 13 &= 5 \end{aligned}$$

Здесь мы встречаемся с неожиданным (парадоксальным) на первый взгляд приемом: дабы постичь содержание «относительно простого» (действия сложения), мы, скрыв знак действия, «усложняем простое»; но это идет на пользу развитию мышления, ибо тем самым прокладывается связь от данного простого понятия к другим сложным понятиям.

Подобно тому как физик, проникая внутрь атома, добывает дополнительную информацию о строении вещества, так и здесь деформация простейшего задания открывает новые пути для развития мышления.

Такие примеры удобно составлять из разрезных цифр, тогда учащиеся, меняя положение единицы в примере, улавливают сущность соответствующего преобразования примера.



Рассмотрим пример:  $17 + 2 = 19$ .

Единица, изображающая десяток, переносится от первого числа ко второму:  $7 + 12 = 19$ .

Приходим к обобщающему выводу: где бы ни был десяток — в первом или во втором слагаемом, — в сумме обязательно будет содержаться этот десяток.

Можно также предложить учащимся примеры, в которых вторая цифра (разряд единиц) неизвестна:

$$1\square + 6 = 18$$

$$1\square + 3 = 15$$

$$1\square + \square = 19$$

$$19 - \square = 13$$

$$16 - \square = 6$$

$$\square 5 + 4 = 1\square$$

$$\square 7 - 6 = 1\square \quad \text{и т.д.}$$

В системе упражнений по данной теме уместны укрупненные задания; под этим мы понимаем такой метод, когда некоторые элементы предыдущего примера входят в последующий пример; благодаря этому решение группы примеров обретает целостный характер: все упражнения группы выступают в некотором единстве:

$$6 + 2$$

$$10 + 6$$

$$16 + 2$$

$$12 + 6$$

$$6 + 12$$

В данной книге мы не останавливаемся на описании других приемов, известных учителям.

Например, нельзя думать, что все примеры должны рассматриваться совместно с деформированными или в группе четверок примеров. Разумеется, решаются также и отдельные примеры с произвольным чередованием знаков сложения и вычитания.

При изучении действий в пределах 20 решаются попеременно с примерами на новый материал также примеры в пределах первого десятка ( $5 + 2 =$  ;  $7 - 3 =$  ) и примеры с круглым десятком ( $10 + 8$ ;  $16 - 6$ ) и т.д.

Раздельное изучение взаимно обратных действий сложения и вычитания имело неизбежным следствием ослабление требований к сложности самостоятельных и контрольных работ.

Домашняя и контрольная работы должны предлагаться на более высоком уровне трудности, включая в себя



наряду с прямыми примерами разнообразные деформированные и неопределенные примеры.

Приведем один из вариантов контрольной работы, проведенной в опытном классе после изучения темы «Действия в пределах второго десятка».

#### Контрольная работа

$$18 - 12 = \square$$

$$7 + 11 = \square$$

$$20 - \square = 16$$

$$13 + 7 = \square$$

$$10 + 9 = \square$$

$$\square - 6 = 10$$

$$\square + \square = 19$$

$$\square - \square = 5$$

$$\square - 13 = 5$$

$$12 + \square = 17$$

$$20 - \square = 5$$

$$20 - 6 = \square$$

$$8 + \square = 18$$

$$17 - 7 = \square$$

$$16 - 5 = \square$$

$$\square + 9 = 18$$

Работа предлагалась на листочках, на которых были написаны учительницей примеры.

Учащимся оставалось лишь вставлять найденные числа в каждый пример. Это сократило время выполнения работы и позволило предложить учащимся 18 примеров вместо обычной нормы — 12 примеров. Все учащиеся справились с заданием за 20 минут.

### 3. Сложение и вычитание в пределах 20 с переходом через десяток

Эта тема считается наиболее трудной в курсе математики I класса, так как переход через десяток представляет качественное усложнение операций.

Перед изучением важно повторить те примеры, в которых одним из компонентов или результатом действия оказывается десяток:

$$3 + 7 =$$

$$6 + 4 =$$

$$10 - 3 =$$

$$10 - 2 =$$

$$7 + 10 =$$

$$10 + 4 =$$

$$14 - 4 =$$

$$15 - 10 =$$



$$10 + 10 =$$

$$20 - 10 =$$

Для подготовки к изучению темы полезно давать также деформированные и неопределенные примеры:

$$\square + \square = 10$$

$$\square + 10 = 17$$

$$\square + \square = 10$$

$$\square + 4 = 14$$

$$10 - \square = 7$$

$$15 - \square = 10$$

$$\square - \square = 8$$

$$16 - \square = 6$$

$$10 + \square = 20$$

$$20 - \square = 10$$

$$\square + 10 = 20$$

$$\square - 10 = 10$$

Решение этих примеров сводится либо к разложению десятка на два слагаемых, либо к поразрядному разложению двузначного числа.

На тех же операциях по существу основывается решение примеров на сложение и вычитание с переходом через десяток.

Изучая эту тему, применяем метод противопоставления.

Так как этим методом дети пользовались при изучении двух предыдущих тем: «Сложение и вычитание в пределах 10» и «Сложение и вычитание в пределах 20 без перехода через десяток», то сам процесс преобразования примера на сложение в пример на вычитание не является для них новым.

Рассмотрим примерную беседу учителя по объяснению данного материала.

Учитель. Сегодня мы будем решать новые, трудные задачи. Будьте внимательны. Посмотрите на доску. Там висит наборное полотно. Посчитайте, сколько карманов на нем.

Ученик. В верхнем ряду 10 карманов, в нижнем ряду также 10 карманов. Всего 20 карманов (рис. 12).

Учитель (закрывает правую половину наборного полотна). Посчитайте, сколько теперь карманов осталось в верхнем ряду и в нижнем ряду.

Ученик. В верхнем ряду 5 карманов и в нижнем ряду 5 карманов. (То же самое делается и с правой половиной



наборного полотна. Выясняется, что число карманов разбито на пятки.)

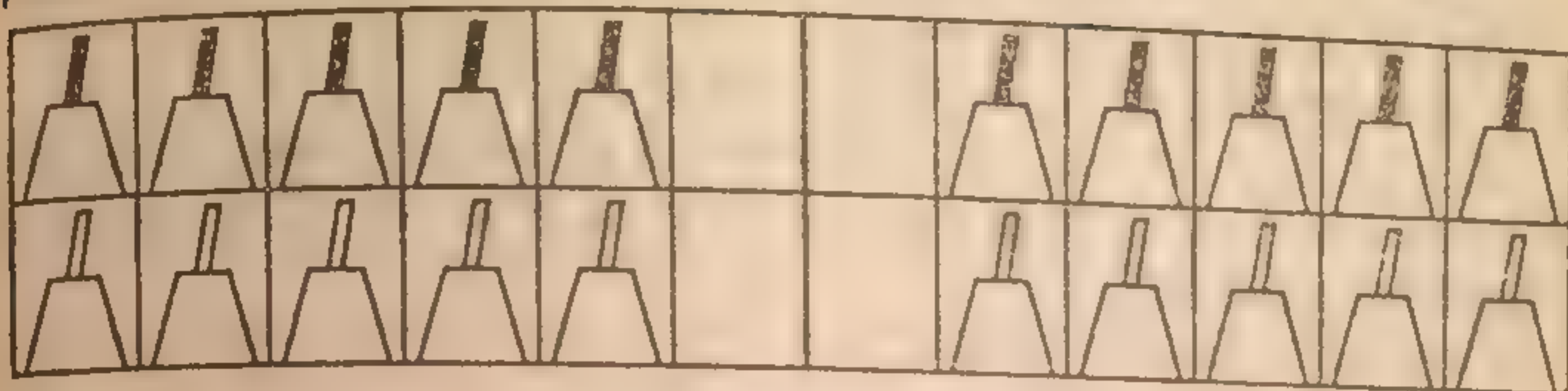


Рис. 12.

Учитель для большей наглядности вкладывает в кармашки полотна разноцветные палочки. Расставляет красные палочки в верхнем ряду, а зеленые — в нижнем ряду. Сколько же палочек всего? Как решать эту задачу? А если в верхнем ряду 9 красных палочек, в нижнем 2 зеленые? Сколько всего будет?

Ученик. Надо к 9 красным палочкам прибавить 2 зеленые палочки.

Учитель. Правильно! Но мы расставили палочки в двух рядах, и ни один из них не полон, в обоих рядах остались пустые карманы. Перенесем палочки из одного ряда в другой так, чтобы заполнить один ряд. Как лучше переносить красные палочки вниз к зеленым или зеленые палочки вверх к красным? Почему?

Ученик. Перенесем 1 зеленую палочку к красным.

Учитель. Сколько тогда окажется в верхнем ряду? Как ты считал?

Ученик. К 9 палочкам прибавил 1 палочку, получилось 10 палочек.

Учитель. А сколько всего получилось? Сколько палочек осталось внизу?

Ученик. Внизу осталась 1 палочка, вверху — 10 палочек. Десяток да единица будет 11. К десятку прибавить 1, получится 11.

Учитель. Как мы решили задачу? Что мы сначала делали? Мы первое слагаемое 9 дополнили до десятка. Сколько мы прибавили к 9, чтобы получить десяток?

Ученик. Мы прибавили 1 палочку. К 9 прибавить 1, получится 10.

Учитель. А дальше как считали?

Ученик. Внизу осталась 1 палочка. 10 да 1 будет 11.

Учитель. Скажите ответ.



Ученик. К 9 прибавить 2, получится 11.

Учитель. Решим теперь обратную задачу. Сколько всего палочек расставлено?

Ученик. Расставлено 11 палочек.

Учитель. Из них 2 палочки зеленые. Их мы отдадим Вите. Сколько тогда останется палочек? Кто скажет условие задачи?

Ученик. Было 11 палочек, из них 2 палочки отдали Вите. Сколько палочек осталось?

Учитель. Как будем решать задачу? Нам надо отдать 2 палочки Вите. Будем отдавать ему по одной палочке. Сначала отдадим отдельную палочку с нижнего ряда. Сколько теперь осталось на доске? Как это узнать?

Ученик. На доске осталось 10 палочек. Из 11 вычесть 1, получится 10.

Учитель. Мы закончили решение задачи? Нет! Нам надо отдать Вите 2 палочки, мы же ему отдали только 1 палочку. Сколько палочек еще надо отдать ему?

Ученик. Еще надо отдать 1 палочку. Из 10 вычесть 1, получится 9.

Учитель. Теперь повторите еще раз задачу и скажите полностью ответ.

Ученик. Из 11 палочек вычесть 2 палочки, получится 9 палочек.

На доске записываются рядом два примера:

$$9 + 2 = 11. \quad 11 - 2 = 9$$

Как видно из изложенного, сначала сопоставляются два примера (на сложение и на вычитание из суммы второго слагаемого).

Затем решается теми же рассуждениями вторая пара примеров:  $9 + 3 = 12$ ;  $12 - 3 = 9$ , затем третья пара примеров:  $9 + 4 = 13$ ;  $13 - 4 = 9$  и т.д.

При таком противопоставлении двух примеров постоянными для пары остаются числа, над которыми совершаются операции.

Так, например, при решении последней пары логические операции совершаются над шестью числами: 9, 4, 13, 10, 3, 1.

Если сопоставить последовательность операций при решении последней пары примеров, то схематически это выглядит так:



$$9 + 4 =$$

1.  $9 + 1 = 10$
2.  $(4 - 1 = 3)$
3.  $10 + 3 = 13$

$$13 - 4 =$$

- I.  $13 - 3 = 10$
- II.  $(4 - 3 = 1)$
- III.  $10 - 1 = 9$

Сравнивая отдельные логические операции, мы обнаружим, что при решении двух данных взаимно обратных примеров совершается как бы замкнутый цикл операций; тем самым решение двух примеров сливается как бы воедино.

Процесс решения начинается с числа 9 и кончается этим же числом. Сопоставляя попарно эти действия, мы обнаружим, что пары промежуточных действий 1 и III; 2 и II; 3 и I также соответственно взаимно обратны.

Далее рассмотрим вопрос об изучении переместительного закона сложения по теме «Действия с переходом через десяток».

Пусть требуется доказать равенство:

$$9 + 5 = 5 + 9$$

Итак, сначала укладываем в верхнем ряду 5 красных палочек, а 9 зеленых — в нижнем ряду.

Указываем, что необходимо дополнять до десятка только верхний ряд палочек. 5 зеленых палочек берем снизу и расставляем вверху. К 5 прибавить 5, получится 10. Внизу осталось 4 палочки (из 9 вычесть 5, получится 4).

Всего получилось 1 десяток да 4 единицы — 14 палочек. К 5 прибавить 9, получится 14. Записываем:

$$5 + 9 = 14$$

Учитель. Сколько палочек мы переносили снизу вверх?

Ученик. Мы переносили 5 палочек.

Учитель. Можно ли было решить задачу проще? Можно ли решить задачу, перенести только 1 палочку? Кто догадался?

Ученик. Можно перенести 1 палочку сверху вниз.

Учитель. Но тогда внизу окажется десяток, а полный десяток должен находиться только в верхнем ряду. Как быть?



Далее выясняется, что мы могли бы сразу поменять местами слагаемые: вверху расставить не 5 красных, а 9 зеленых, а внизу, наоборот, вместо 9 зеленых расставить 5 красных палочек.

Теперь учащиеся видят, что при таком способе мы добиваемся двух целей: во-первых, решение более простое — снизу переносим наверх 1 палочку, и пример решается так:

$$\begin{array}{r} 9 + 5 \\ 9 + 1 = 10 \\ (5 - 1 = 4) \\ 10 + 4 = 14, \end{array}$$

во-вторых, соблюдено правило: в верхнем ряду располагается полный десяток.

Для большей наглядности при наличии двух касс можно оба способа иллюстрировать рядом. Сравнивая процессы решения, учащиеся видят выгоду второго способа. На доске и в тетрадях записываются решенные примеры друг под другом:

$$\begin{array}{r} 5 + 9 = \\ 9 + 5 = \end{array}$$

От этой записи необходимо перейти к записи:

$$5 + 9 = 9 + 5$$

На перестановку слагаемых решаются и другие примеры:

$$6 + 9 = 9 + 6$$

Наконец, переместительный закон записывается в виде буквенной формулы:

$$a + b = b + a$$

Учащиеся повторяют правило: от перестановки слагаемых сумма не изменяется.

К моменту изучения темы «Второй десяток» учащиеся хорошо понимают сущность переместительного закона. Поэтому во всех случаях, когда второе слагаемое больше первого, вместо прибавления большего числа к меньшему дети прибавляют меньшее число к большему



(достаточно лишь изредка наглядно иллюстрировать допустимость перестановки слагаемых).

Таким образом, начиная со второго или с третьего урока решаются четверки примеров вида:

$$\begin{array}{l} 9 + 5 = \\ 5 + 9 = \end{array} 14 \quad \begin{array}{l} 14 - 5 = 9 \\ 14 - 9 = 5 \end{array}$$

Пусть дан пример:  $6 + 9 =$

Если требуется решить обратный пример на вычитание, то целесообразно на первых порах решить пример непосредственно (без перестановки слагаемых):  $6 + 9 = 15$ ;  $6 + 4 = 10$ ;  $9 - 4 = 5$ ;  $10 + 5 = 15$ .

Затем справа записывается соответствующий пример на вычитание 9 из 15 ( $6 + 9 = 15$ ;  $15 - 9 = 6$ ).

При анализе решения примеров в пределах 20 выявляется роль прямых и обратных ассоциаций, которая оказывается различной в зависимости от характера упражнений.

Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{l} 7 + 9 = \\ 7 + 3 = 10 \\ (9 - 3 = 6) \\ 10 + 6 = 16 \end{array}$$

В решении второго примера наиболее трудным оказывается второй этап ( $9 - 3 = 6$ ).

Чтобы разложить 9 на два слагаемых 3 и 6, необходимо совершить довольно сложные умозаключения, а именно:

1. Осмыслить то, что необходимо 7 дополнить до десятка (т.е. решить:  $7 + \square = 10$ ).

2. Выяснить, что для этого не хватает 3.

3. Осмыслить, что 3 должно быть «взято» («занято») из второго слагаемого 9; иначе говоря, 3 должно быть одним из двух слагаемых, на которые разлагается число 9:

$$3 + \square = 9$$

4. Найти, что второе слагаемое, дополняющее 3 до 9, есть 6.



### 5. Прибавить 6 к 10.

Схематически процесс решения примера  $7 + 9$  согласно предыдущему анализу можно изобразить развернуто так:

$$\begin{array}{r} 7 + 9 = \\ \hline 7 + \square = 10 \\ 7 + 3 = 10 \\ \square + 3 = 9 \\ (6 + 3 = 9) \\ 10 + 6 = 16 \end{array}$$

Следовательно, только на четвертом этапе ученик представляет, что 9 — это 3 да 6.

Аналогичные связи устанавливаются при решении примеров на вычитание:

$$\begin{array}{r} 13 - 9 = \\ \hline 13 - 3 = 10 \\ (9 - 3 = 6) \\ 10 - 6 = 4 \end{array}$$

На втором этапе опять используется связь: 9 — это 3 и 6.

В существующей методике при объяснении сложения и вычитания с переходом через десяток принято обычно фиксировать процесс решения в два этапа:

$$\begin{array}{r} 13 - 9 = \\ \hline 13 - 3 = 10 \\ 10 - 6 = 4 \end{array}$$

Между тем пропущенный второй этап ( $9 - 3 = 6$ ) является наиболее важным, и потому целесообразно записывать решение примера на первых порах в три этапа, как было показано выше.

Затем надо переходить к записи в две строки, а потом вообще к устному решению, без письменной фиксации промежуточных результатов.



Действия сложения и вычитания в пределах 20 входят в таблицу сложения и вычитания однозначных чисел и поэтому должны быть хорошо заучены. При этом надо обратить внимание не на раздельное изучение таблицы сложения и таблицы вычитания, а на заучивание четверок примеров (рис. 13):

в случае равных слагаемых четверка взаимосвязанных примеров вырождается в пару примеров:

$$6 + 6 = 12 \quad 12 - 6 = 6$$

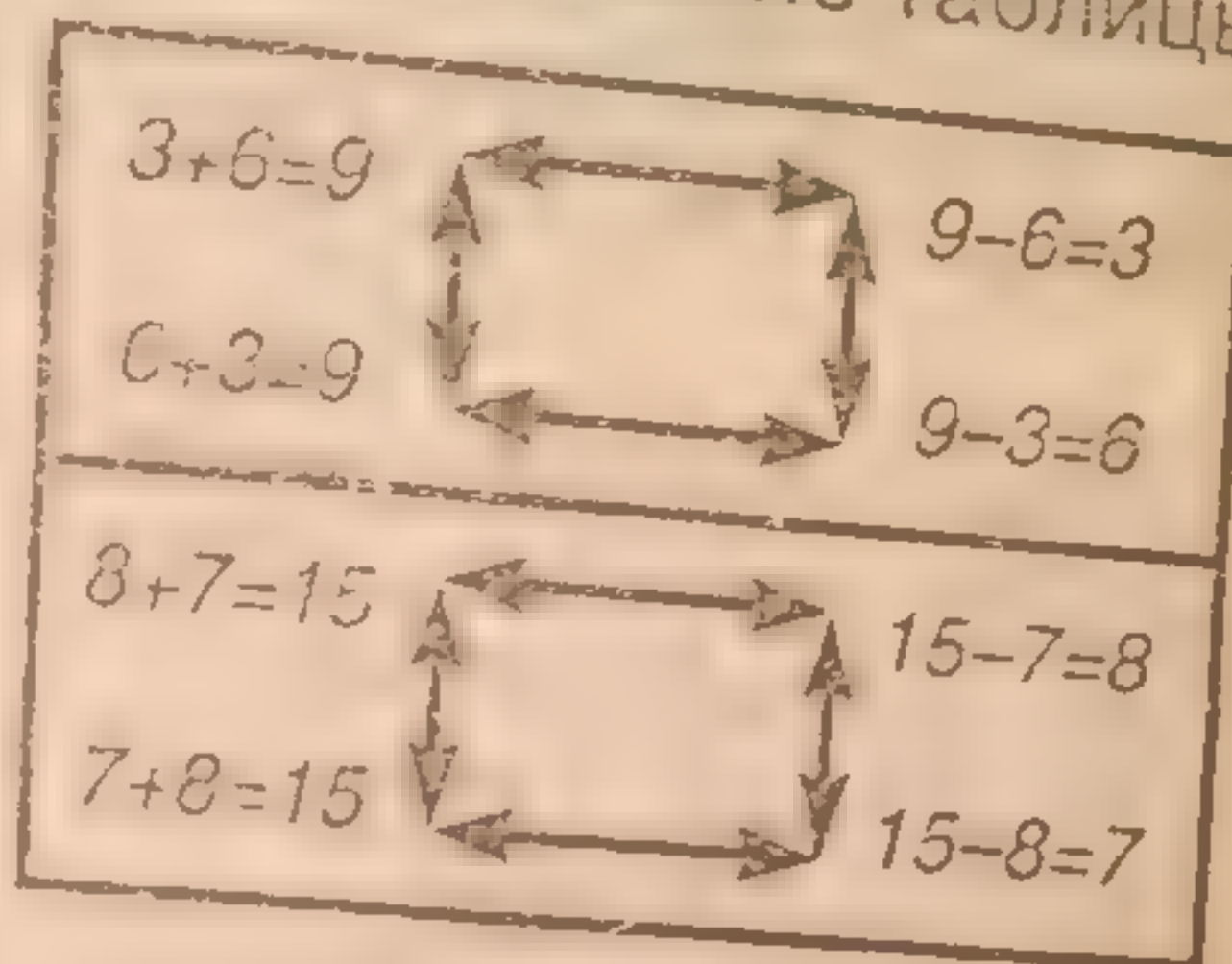


Рис. 13.

Если в практике обучения подвергать перестройке во взаимно обратные не только примеры на сложение, но и примеры на вычитание, то ассоциации вида 6 да 9 — 15, 15 без 9 — 6 проявляются быстро и безошибочно.

При заучивании обычной таблицы сложения подряд запоминаются всего 34 примера и столько же примеров на вычитание (всего 168 примеров).

Если запоминание будет совершаться по группам взаимосвязанных примеров, то нужно запомнить 45 основных случаев, из которых в 9 случаях имеются равные слагаемые:

$$1 + 1 = 2 \quad 2 + 2 = 4 \dots \quad 9 + 9 = 18$$

Стало быть, при укрупненном подходе требуется запомнить лишь 36 четверок примеров и 9 пар примеров; иначе говоря, при этом возникают 45 различных случаев вместо 168! Очевидно, что при такой методике наиболее экономным образом будет функционировать память человека, так как выбор одного случая из 168 различных случаев гораздо сложнее, чем из 45.

Одновременное изучение сложения и вычитания (в дальнейшем умножения и деления) облегчает совершение процессов контроля (проверки) результатов.

Пусть, например, решающий получил неправильный результат:

$$13 - 7 = 5$$



Процесс проверки, контроля, осуществляющийся автоматически при должной отработке нужных навыков, выполняется на основе преобразования решенного примера на вычитание в пример на сложение; так, ошибочность связи  $13 - 7 = 5$  обнаружена на основе более прочной верной связи на сложение чисел:

$$7 + 5 = 12$$

Уже при изучении действий первой ступени в пределах 20 возможно начать наблюдения над парами примеров, имеющих один и тот же результат.

Учитель. Решим пример:  $3 + 5$ . Чему равна сумма этих слагаемых?

Ученик. Сумма равна 8.

Учитель. Укажите первое и второе слагаемое. Увеличим первое слагаемое на 1, а второе уменьшим на столько же (т.е. на 1). Составьте новый пример.

Ученик.  $3 + 1 = 4$ ;  $5 - 1 = 4$ ;  $4 + 4 = 8$ .

Учитель. Запишем эти примеры друг под другом (рис. 14). Как мы изменили слагаемые? Изменилась ли сумма? Когда сумма не изменяется?

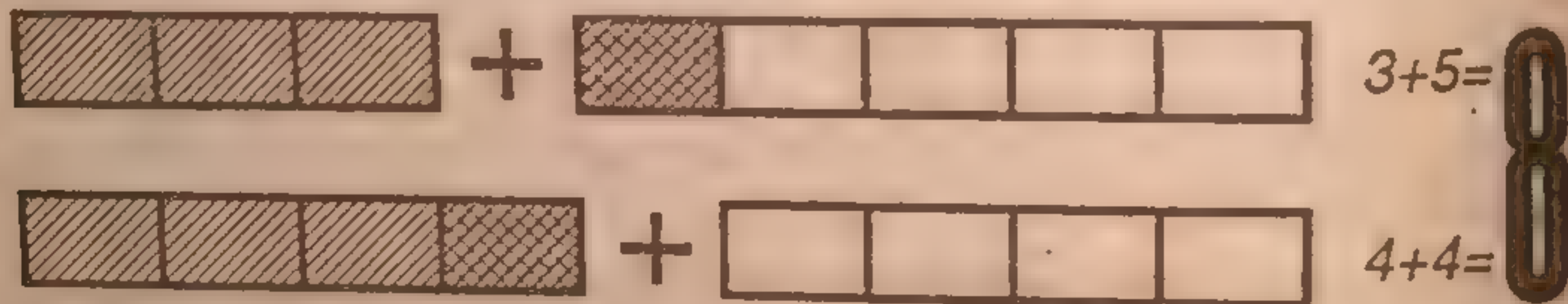


Рис. 14.

Аналогичные наблюдения проводим над другой парой примеров, при ином изменении слагаемых, например:

$$\begin{array}{l} 6 + 9 = \\ (6 - 2) + (9 + 2) = \\ 4 + 11 = \end{array} 15 \quad \begin{array}{l} 6 + 9 = \\ (6 - 3) + (9 + 3) = \\ 3 + 12 = \end{array} 15$$

Вместе с учащимися формулируется правило: «Если одно слагаемое увеличить уменьшить на несколько единиц, а другое слагаемое уменьшить увеличить на столько же единиц, то сумма не изменяется».

Надо отметить, что в этом правиле выражено сложное суждение, включающее изменение двух компонентов,



причем имеется заключение о сохранении результата (суммы). Опыт показывает, что такие зависимости усваиваются детьми с большим интересом, чем даже логически более простые связи об изменении лишь одного компонента: «Если одно слагаемое увеличить на несколько единиц, а другое оставить без изменения, то сумма увеличится на столько же единиц».

$$\begin{array}{r} 6 + 9 = 15 \\ (6 - 2) + 9 = (15 - 2) \\ 4 + 9 = 13 \end{array}$$

Для разъяснения зависимостей подобного рода имеют важное значение упражнения с многократным преобразованием исходного примера посредством замены одного или больше элементов равенства при постоянстве других элементов записи.

Схематически такая работа выглядит так:

$$\begin{array}{l} 2 + 5 = 7 \\ 3 + 5 = 8 \\ 3 + 6 = 9 \\ 4 + 6 = 10 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} 2 + 5 = 7 \\ 3 + 5 = 8 \\ 3 + 6 = 9 \\ 4 + 6 = 10 \end{array}$$

Серию таких преобразований удобнее выполнять устно, пользуясь записями на грифельной доске\*.

Учитель пишет на доске исходный пример:

$$2 + 5 = \square$$

После решения пример имеет вид:

$$2 + 5 = 7$$

Учитель далее стирает слагаемое и сумму (2, 7):

$$\square + 5 = \square$$

и затем записывает новую сумму:

$$\square + 5 = 8$$

\* Здесь важна следующая деталь: общность второго слагаемого «5» для первого и второго примеров в правой записи сразу бросается в глаза. Это передано величиной цифры.



Ученик на своей доске вслед за учителем записывает полученную формулу. Вместо первого стертого слагаемого находят новое слагаемое 3, которое записывается на освобожденном месте.

#### 4. Работа с таблицей Пифагора

Заключительным разделом изучения действий в пределах 20 является ознакомление с таблицей Пифагора, работа над которой знакомит детей с общими навыками работы над таблицей с двумя входами. Учителю целесообразно изготовить настенную таблицу Пифагора (для сложения и вычитания) и проводить по ней с помощью указки некоторые упражнения.

В таблице Пифагора номера столбцов и строк лучше выделить двумя цветами (рис. 15).

По таблице решают задачи двух видов:

##### Прямая задача

Даны два слагаемых: 7 и 5. Найти их сумму.

##### Решение

Ведем указкой по 7-й строке и 5-му столбцу.

В пересечении линий находим сумму  $7 + 5 = 12$

##### Обратная задача

Дана сумма двух слагаемых — 12. Найти слагаемое.

Сколько разных решений имеет задача?

##### Решение

Находим диагональ с числом 12, на этой диагонали 7 чисел. Значит, существуют 7 разных решений задачи:

$$3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7 = 6 + 6 = 12$$

$$9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5 = 12$$

Итак, нахождение суммы двух данных чисел — задача определенная, имеющая одно решение, нахождение слагаемых по данной сумме — задача неопределенная — эта задача имеет несколько решений.

Таблица Пифагора может стать источником специальных упражнений.



Так, по главной диагонали располагаются суммы равных слагаемых:

$$1 + 1 = 2$$

$$2 + 2 = 4$$

$$3 + 3 = 6 \text{ и т.д.}$$

В клетках, симметричных относительно этой диагонали, располагаются равные суммы переставленных слагаемых, например:

$$7 + 4 = 4 + 7$$

$$7 + 6 = 6 + 7 \text{ и т.д.}$$

a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Рис. 15.

(Если перегнуть таблицу Пифагора вдоль главной диагонали, то совпадут симметричные клетки, характеризующие переместительный закон сложения.)

## 5. Связь между деформированными примерами и уравнениями

Мы отмечали психологическую целесообразность решения значительного числа деформированных примеров в I — II классах.

Рассмотрим пример:  $\square + 3 = 7$ .

Ученик находит подбором пропущенное слагаемое 4 и записывает это число внутри клетки:

$$4 + 3 = 7$$

Деформированный пример — это еще не уравнение: решение его связано с пробами, подгонкой ответа.

Решим тот же пример в форме уравнения:

$$x + 3 = 7$$

$$x = 7 - 3$$

$$x = 4$$

Уравнение решается на основе точного правила. Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое.

Как же решается деформированное упражнение?



Если уравнение решается с помощью четких правил (алгоритмов), то решение деформированного примера выполняется прямым подбором пропущенных элементов в несколько шагов.

При решении уравнений необходимо соблюдать схему:

а) преобразования уравнения писать не рядом, а друг под другом;

б) неизвестное и знак равенства писать друг под другом.

Рассмотрим примеры.

Нахождение  
слагаемого:

$$\begin{array}{l} + 2 = 8 \\ \mathbf{x} \quad \quad = 8 - 2 \\ \quad \quad = 6 \end{array}$$

Нахождение  
уменьшаемого:

$$\begin{array}{l} - 3 = 5 \\ \mathbf{a} \quad \quad = 5 + 3 \\ \quad \quad = 8 \end{array}$$

Нахождение  
слагаемого:

$$\begin{array}{l} 6 + \quad = 8 \\ \mathbf{y} \quad \quad = 8 - 6 \\ \quad \quad = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 - \quad = 1 \\ \mathbf{b} \quad \quad = 6 - 1 \\ \quad \quad = 5 \end{array}$$

СЛОЖЕ  
В Г

1. Подго

Для успешного  
сделах 100 необ  
тех вопросов:  
а) знание всех с  
лагаемых;  
б) знание поразр  
единицы и десято  
в) знание табли  
нных чисел.  
3 основу метод  
очить выработ  
а При повторен  
мерами вида  
ере) решать при

$$\begin{array}{l} \square + \square \\ 10 - \square \end{array}$$

Решаются такж  
ение числа 10  
обами:

б) При работ  
особенно умест  
ток:

$$10 + \square$$



# Глава III

## СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ В ПРЕДЕЛАХ 100

### 1. Подготовительные упражнения

Для успешного изучения сложения и вычитания в пределах 100 необходимо твердое знание следующих трех вопросов:

а) знание всех случаев разложения числа 10 на два слагаемых;

б) знание поразрядного состава чисел в пределах 20 (единицы и десятков);

в) знание таблицы сложения и вычитания всех однозначных чисел.

В основу методики повторительных упражнений надо включить выработку множественных связей.

а) При повторении состава числа 10 наряду с прямыми примерами вида  $5 + 4$ ,  $10 - 3$  надо (даже в большей мере) решать примеры вида:

$$\begin{array}{ll} \square + 2 = 10 & 3 + \square = 10 \\ 10 - \square = 4 & \square - 9 = 1 \end{array}$$

Решаются также неопределенные примеры на разложение числа 10 на слагаемые всеми возможными способами:

$$\begin{array}{l} \square + \square = 10 \\ \square + \square = 10 \text{ и т.д.} \end{array}$$

б) При работе над составом чисел в пределах 20 особенно уместны задания, в которых фигурирует десяток:

$$\begin{array}{ll} 10 + \square = 17 & \square + 2 = 12 \\ \square - 4 = 10 & 13 - \square = 3 \end{array}$$



в) При повторении таблицы сложения и вычитания наряду с использованием таблицы, составленной по возрастанию одного из слагаемых ( $2 + 6$ ;  $3 + 6$ ;  $4 + 6$  и т.д.), необходимо широко использовать переместительный закон сложения:

$$2 + 6 = 8 \text{ и } 6 + 2 = 8; \text{ значит, } 2 + 6 = 6 + 2;$$

$$7 + 8 = 15 \text{ и } 8 + 7 = 15; \text{ значит, } 7 + 8 = 8 + 7 \text{ и т.д.}$$

При повторении этого закона важно использовать обобщенную запись  $a + b = b + a$  и соответствующее правило: от перестановки слагаемых сумма не изменяется.

Нужно при этом помнить, что процесс абстрагирования, переход от конкретного примера  $2 + 6 = 6 + 2$  к обобщенной записи  $a + b = b + a$  нелегко для детей. Поэтому нужны разнообразные упражнения, постепенно подводящие детей к пониманию этой формулы.

Сначала предлагается проверить формулу  $a + 3 = 3 + a$  для различных значений  $a$ .

Например:

$$a + 3 = 3 + a$$

$$1 + 3 = 3 + 1$$

$$2 + 3 = 3 + 2$$

$$10 + 3 = 3 + 10 \text{ и т.д.}$$

Так же проверяется, например, формула  $5 + b = b + 5$  для различных значений:  $b = 1, 2, 10$  и т.д.

Обращаем далее внимание детей на то, что значениями  $a$  и  $b$  могут быть любые числа (но в двух частях одного равенства они должны быть одними и теми же).

После таких разъяснений предлагается проверить переместительный закон при разных значениях букв. Пусть  $a = 3$ ,  $b = 6$ . Выражения с буквами и с числами записываем друг под другом:

$$a + b = b + a$$

$$3 + 6 = 6 + 3$$

$$4 + 1 = 1 + 4...$$

Вместо букв  $a$  и  $b$  используются и другие буквы, например:

$$x + y = y + x$$



Для усвоения содержания данного закона полезно предлагать упражнения по восстановлению пропущенных чисел или символов в деформированных равенствах:

$$\begin{aligned} 2 + \square &= \square + 7 \\ a + \square &= 4 + \square \\ \square + \square &= \square + \square \end{aligned}$$

Далее обращается внимание учащихся на составление четверок примеров по данной тройке чисел:

$$\begin{array}{c} 9, 3, 12 \\ \hline 9 + 3 = 12 \qquad 12 - 3 = 9 \\ 3 + 9 = 12 \qquad 12 - 9 = 3 \end{array}$$

Систематическое сопоставление сложения с соответствующими случаями вычитания при повторении, выяснение того, что вычитание есть действие, обратное сложению (видоизмененное сложение, следствие сложения), создает почву для одновременного изучения действия сложения и вычитания в последующем, при выполнении действий над многозначными числами или дробями.

На вводных занятиях по разделу «Сотня» выгодно одновременное рассмотрение трех вопросов: нумерация двузначных чисел, действий первой ступени над круглыми десятками и единицами и тех же действий над именованными числами.

Иначе говоря, на этих уроках надо повторить десятичные меры с помощью следующих совмещенных таблиц:

	сотня	единицы
$\begin{array}{c} \text{дм} \\ 1 \text{ м} \\ \text{руб.} \\ \text{грив.} \end{array} = \begin{array}{c} \text{см} \\ 10 \text{ дм} \\ \text{грив.} \\ \text{коп.} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{м} \\ 1 \text{ руб.} \\ \text{ц} \end{array} = \begin{array}{c} \text{см} \\ 100 \text{ коп.} \\ \text{кг} \end{array}$	

В связи с изучением десятичных мер проводятся разнообразнейшие работы по изготовлению наглядных пособий, по измерениям и т.п.



Усвоение этих соотношений достигается посредством решения групп сходных примеров.

Так, например, при изучении нумерации чисел в пределах 100 надо предлагать следующие группы вопросов или заданий, имеющих информационную общность:

I

- 1) Сколько единиц в 1 десятке (1 сотне)?
- 2) Сколько копеек в 1 гривеннике (1 руб.)?
- 3) Сколько сантиметров в 1 дм (1 м)?
- 4) Сколько дециметров в 1 м?
- 5) Сколько килограммов в 1 ц?

II

- 1) Число 73 состоит из 7 десятков и 3 единиц.
- 2) Число 73 см состоит из 7 дм и 3 см.
- 3) Число 73 коп. состоит из 7 гривенников и 3 коп.

III

8 дес. + 4 ед. = <input type="text"/> ед.	84 — 30 — 2 =
8 дм + 4 см = <input type="text"/> см	84 см — 3 дм — 2 см =
8 м + 4 дм = <input type="text"/> дм	
8 грив. + 4 коп. = <input type="text"/> коп.	84 коп. — 3 грив. — 2 коп. =

IV

Поучительны пары структурно-противоположных заданий:

а) Дано число 56. Сколько десятков в этом числе? Сколько единиц?

б) Число состоит из 4 десятков и 3 единиц. Какое это число? Назовите число. Напишите число. Отложите его на счетах.

Эти же вопросы можно изобразить символически следующим образом:

$$\begin{aligned} \square + 6 &= 56 \\ 40 + 3 &= \square \end{aligned}$$

При изучении нумерации двузначных чисел полезны вначале упражнения по зрительному сравнению двузначных чисел.



37

Можно пре  
написать соот  
Далее пред

36

49

8

Полезно и  
Даны три  
исел четы

Решени

Сущност  
быстрее и  
упражнени  
При изу  
использов



Пусть речь идет об изображении числа 37. Ученик должен изобразить в своей тетради слева три десятка клеток, а справа как и при записи, 7 единиц (рис. 16).

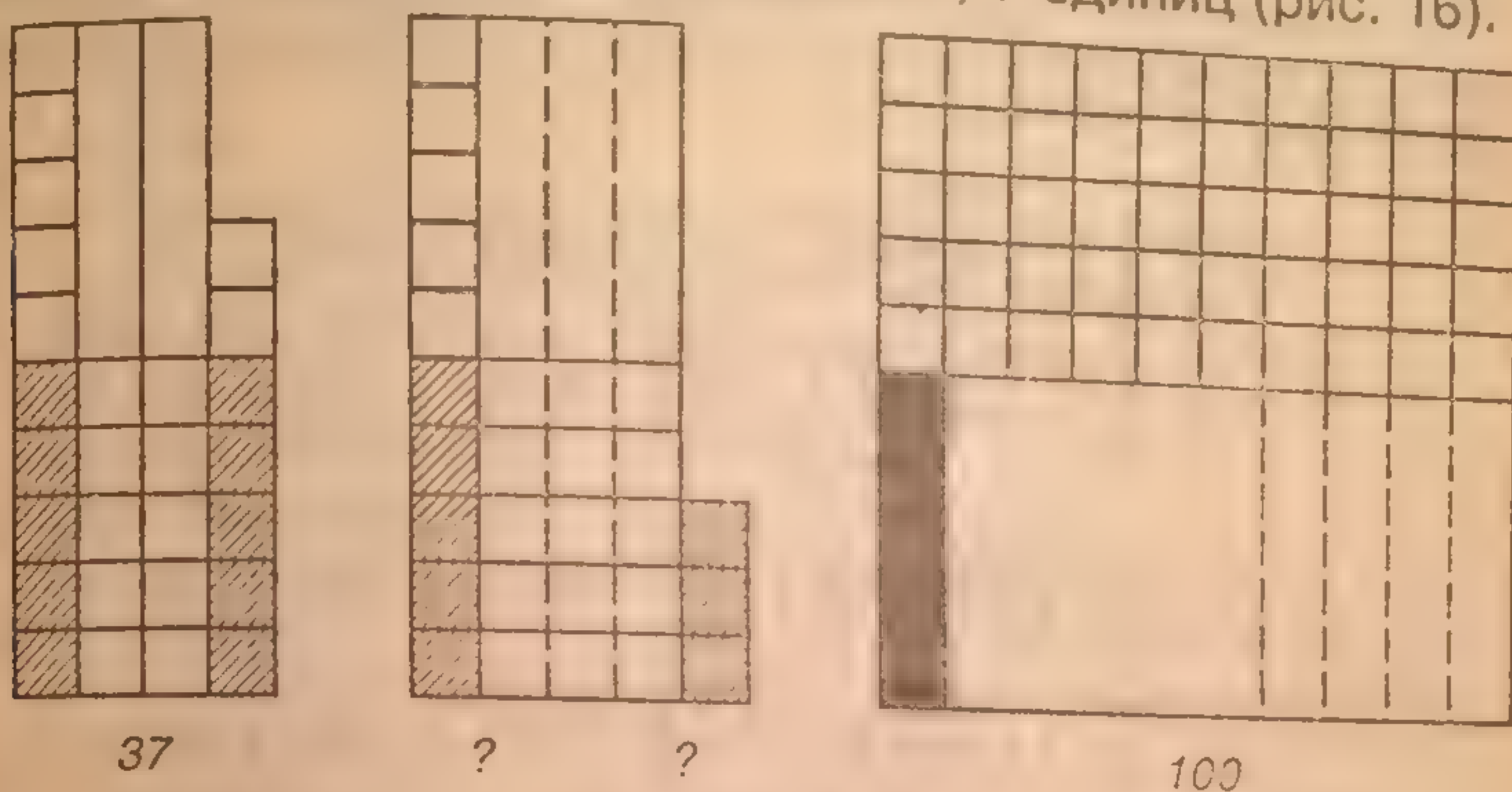


Рис. 16.

Можно предложить задание: по рисунку назвать и написать соответствующее число.

Далее предлагаются такие упражнения:

$$36 - 6 =$$

$$49 - 40 =$$

$$\square - 7 = 30$$

$$81 - \square = 1$$

$$\square - 20 = 3$$

$$\square \text{ дес.} + 7 \text{ дес.} = 87 \text{ ед.}$$

$$\square \text{ м} + 7 \text{ дм} = 87 \text{ дм}$$

$$\square \text{ дм} + \square \text{ см} = 36 \text{ см}$$

$$\square \text{ кг} = 1 \text{ ц}$$

$$100 \text{ коп.} = \square \text{ руб.}$$

Полезно и такое задание:

Даны три числа: 50, 3, 53. Составить из этих трех чисел четыре примера. Решить эти примеры на счетах.

Решение:

$$50 + 3 = 53$$

$$3 + 50 = 53$$

$$53 - 3 = 50$$

$$53 - 50 = 3$$

Сущность нумерации двузначных чисел постигается и быстрее и лучше на основе выполнения разнообразных упражнений, приведенных выше.

При изучении нумерации двузначных чисел надо чаще использовать счеты, на которых дети учатся отклады-



вать числа, наблюдать поразрядный состав чисел, а также производить сложение и вычитание.

На следующем рисунке показано оформление классных счетов и выполнение на них сложения двузначных чисел (рис. 17).

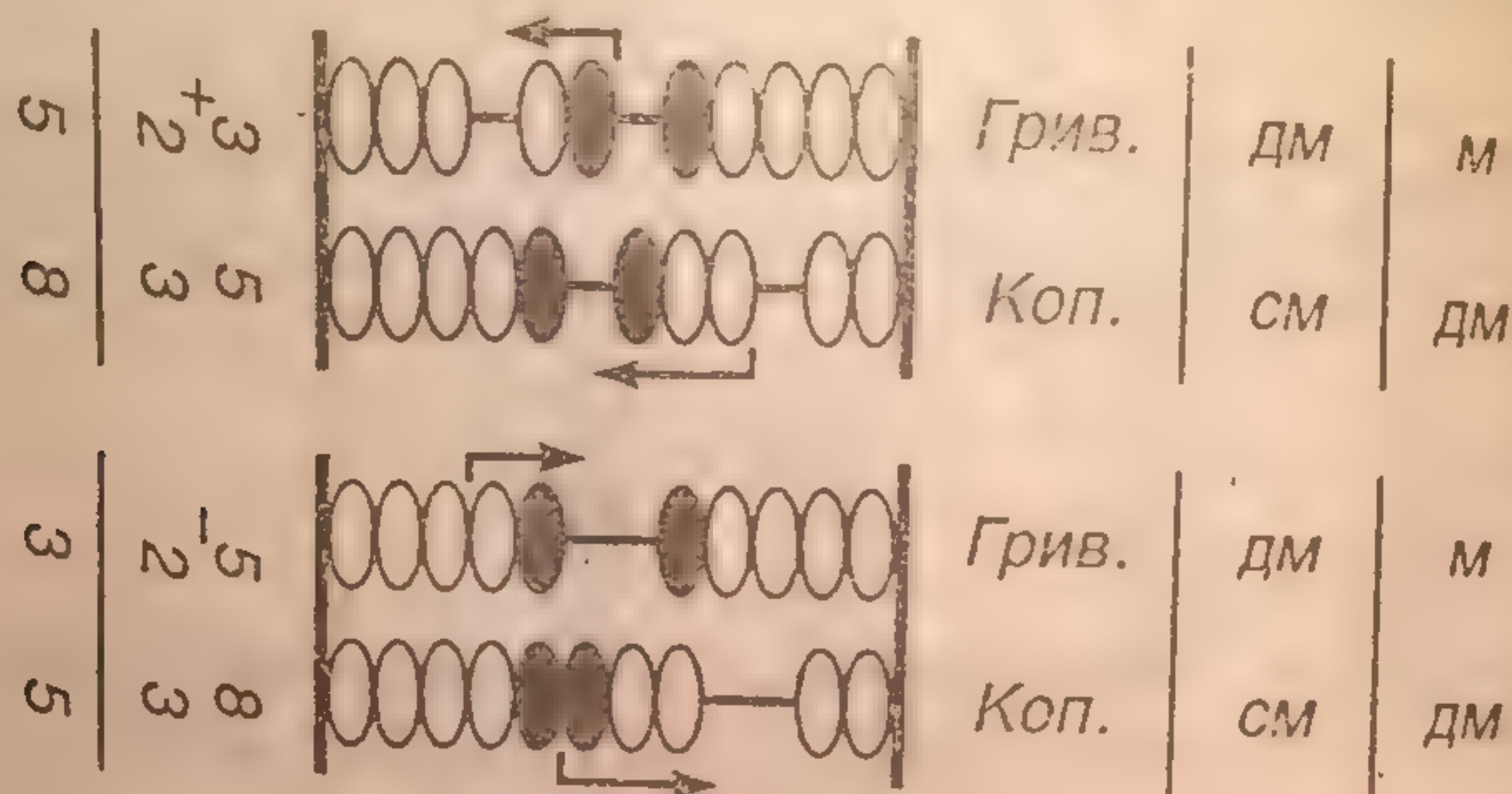


Рис. 17.

## 2. Сложение и вычитание без перехода через десяток

Мы в своей практике убедились в преимуществах группировки материала, построенной на одновременном изучении следующих преобразований:

1. Сложение и вычитание на примерах вида:

$$45 + 3 \quad 3 + 45 \quad 48 - 3 \quad 48 - 45$$

2. Сложение и вычитание на примерах вида:

$$45 + 30 \quad 30 + 45 \quad 75 - 30 \quad 75 - 45$$

3. Сложение и вычитание на примерах вида:

$$45 + 23 \quad 68 - 23$$

Такая система обеспечивает постепенное нарастание трудности в расположении материала, так как более сложные случаи рассматриваются на основе ранее изученных простых случаев.

Сложение и вычитание на примерах вида:

$$\begin{array}{ll} 45 + 3 & 48 - 3 \\ 3 + 45 & 48 - 45 \end{array}$$



Данная тема рассматривается на одном уроке. При этом в основу рассмотрения следует взять одновременное решение четверки примеров.

Пусть требуется прибавить 3 к 45.

Учитель. Сколько десятков и сколько единиц в числе 45?

Ученик. 45 состоит из 4 десятков и 5 единиц.

Учитель. Отложите это число на счетах.

(Ученики откладывают четыре десятка и внизу 5 единиц.)

К этому числу надо прибавить 3.

Единицы надо прибавлять к единицам.

Было 5 единиц, да еще 3 единицы. Сколько стало всего единиц?

Ученик. К 5 единицам прибавить 3 единицы, получится 8 единиц.

Учитель. Да еще 4 десятка. 4 десятка и 8 единиц — сколько это будет?

Ученик. 48.

Учитель. Скажите ответ полностью.

Ученик. К 45 прибавить 3, получится 48.

Учитель. А теперь решим обратный пример, т.е. пример на вычитание, составленный из тех же чисел. В первом примере мы прибавляли однозначное число 3. А теперь вычтем его. Кто скажет новый пример?

Ученик. Из 48 вычесть 3.

Учитель. Как будем решать? 48 состоит из десятков и единиц. Сколько тех и других?

Ученик. 48 состоит из 4 десятков и 8 единиц. Из 8 единиц вычитаем 3 единицы, останется 5 единиц, да еще 4 десятка, получится 45.

Из 48 вычесть 3, получится 45.

Одновременно с рассуждениями выполняется вычитание и на классных счетах.

В результате этой работы на доске появляются рядом записи решения взаимно обратных примеров на сложение и вычитание (над чертой — условие примера; под чертой — последовательность вычислительных операций):



$$45 + 3 = \square$$

$$48 - 3 = \square$$

$$5 + 3 = 8$$

$$8 - 3 = 5$$

$$40 + 8 = 48$$

$$40 + 5 = 45$$

Если в первой паре примеров мы перешли от примера на сложение к примеру на вычитание, то вторую пару надо решать в ином порядке: сначала — на вычитание ( $56 - 4 = 52$ ), а потом составить и решить соответствующий пример на сложение ( $52 + 4$ ):

$$52 + 4 = \square$$

$$56 - 4 = \square$$

$$2 + 4 = 6$$

$$6 - 4 = 2$$

$$50 + 6 = 56$$

$$50 + 2 = 52$$

Затем решаются четверки примеров вида:

$$34 + 5 = \square$$

$$39 - 5 = \square$$

$$5 + 34 = \square$$

$$39 - 34 = \square$$

Выясняется, что вместо примера  $5 + 34$  можно решить пример  $34 + 5$ : «Вместо того чтобы к однозначному числу прибавлять двузначное, легче к двузначному числу прибавить однозначное». Какой закон здесь применили? (Применили переместительный закон сложения.)

Специального внимания заслуживают случаи вычитания двузначного числа из двузначного ( $39 - 34 = 5$ ).

Учитель. Из каких чисел состоит число 39?

Ученик. 39 состоит из 3 десятков и 9 единиц.

Учитель. Из каких чисел состоит число 34?

Ученик. Число 34 состоит из 3 десятков и 4 единиц.

Учитель. Нам надо вычесть 34 из 39. В каком порядке будем выполнять действия: сначала из 3 десятков вычтем 3 десятка (показывает на счетах). Сколько осталось десятков?

Ученик. Из 3 десятков вычесть 3 десятка — десятков не осталось.

Учитель. Потом из 9 единиц вычтем 4 единицы. Сколько осталось единиц?



Ученик. Осталось 5 единиц. Из 39 вычесть 34, осталось 5 единиц.

Затем решаются и изолированные примеры на оба действия, к тому же используются обратные и неопределенные примеры.

Сложение и вычитание на примерах вида:

$$30 + 26, \quad 26 + 30, \quad 56 - 30, \quad 56 - 26$$

Данная тема изучается в том же порядке, что и предыдущая. На доске написан пример:  $30 + 26$ .

Учитель. Сколько десятков в числе 30? Сколько десятков в числе 26?

При сложении надо десятки складывать с десятками, а единицы с единицами. Кто подсчитал? Как вы считали?

Ученик. К 3 десяткам прибавить 2 десятка, получится 5 десятков; 5 десятков да еще 6 единиц, получится 56. К 30 прибавить 26, получится 56.

Учитель. Кто составит другой пример на сложение с теми же числами, чтобы получилось 56?

Ученик. К 26 прибавить 30, получится 56.

Учитель. А как вы считали?

Ученик. К 2 десяткам прибавить 3 десятка, получится 5 десятков, да еще 6 единиц — всего 56.

Затем к примеру составляют обратный пример:

$$56 - 30 =$$

Учитель. Из каких чисел состоит 56? Как вычесть 30 из 56?

Ученик. 56 состоит из 5 десятков и 6 единиц. 30 — это 3 десятка, да еще осталось 6 единиц, получится 26.

Из 56 вычесть 30, получится 26.

Учитель записывает на доске рядом решение двух примеров:

$$26 + 30 = \square$$

$$56 - 30 = \square$$

$$20 + 30 = 50$$

$$50 - 30 = 20$$

$$50 + 6 = 56$$

$$20 + 6 = 26$$

Необходимо подробно объяснить процесс решения четвертого примера:  $56 - 26$ .

Учитель. Как вычесть 26 из 56?

Сначала вычитаем 2 десятка из 5 десятков. Сколько осталось?



Ученик. Из 5 десятков вычесть 2 десятка, останется 3 десятка.

Учитель. Далее вычитаем единицы из единиц. Из 6 единиц вычесть 6 единиц, останется нуль (0) единиц (не осталось единиц).

Ответ записывается так:

$$56 - 26 = 30$$

Далее решаются четверки примеров по данной тройке чисел, например:

94, 64, 30

$$\begin{array}{ll} \square + \square = 94 & \square - \square = 30 \\ \square + \square = 94 & \square - \square = 64 \end{array}$$

**Сложение и вычитание на примерах вида:**  
 **$45 + 23, 68 - 23$ .**

Мы уже знаем, что сложение и вычитание рассматриваются одновременно, причем вначале используется преобразование примера на сложение в пример на вычитание, а затем и обратное преобразование. Последнее важно для того, чтобы возникла не только связь «сложение  $\rightarrow$  вычитание» (сложение проверяется вычитанием), но и связь иного направления «вычитание  $\rightarrow$  сложение» (вычитание проверяется сложением); в итоге возникает трехчленная связь «сложение  $\rightarrow$  вычитание  $\rightarrow$  сложение». Так создается представление о действиях первой ступени, образующих «первую целостность» математических операций.

Решение таких примеров удобно записывать рядом:

$$\begin{array}{ll} 45 + 23 & 68 - 23 \\ 45 + 20 = 65 & 68 - 20 = 48 \\ 65 + 3 = 68 & 48 - 3 = 45 \end{array}$$

Объяснение ведется так же, как и раньше.

Учащимся предлагается преобразовывать решенный пример в три других примера с теми же числами:



$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 5 + 62 = 67 \quad 67 - 62 = 5 \\ & 62 + 5 = 67 \quad 67 - 5 = 62 \\ \text{б)} & 40 + 58 = 98 \quad 98 - 58 = 40 \\ & 58 + 40 = 98 \quad 98 - 40 = 58 \end{array}$$

Как и в предыдущих случаях, даются деформированные и неопределенные примеры, в частности, и при проведении самостоятельных или контрольных работ:

$$\begin{array}{lll} 28 + 31 = & 69 - 28 = & \square \triangle 25 = 39 \\ \square - 62 = 24 & \square + \square = 75 & 40 \triangle 29 = 69 \\ \square + 31 = 63 & 26 + \square = 97 & 20 \triangle 9 = 11 \\ 79 - \square = 69 & 38 \triangle \square = 12 & 32 \triangle 46 = 78 \end{array}$$

### 3. Сложение и вычитание с переходом через десяток

Наша практика показала, что при изучении данного раздела целесообразной остается та же линия установления тесных преемственных связей между сложением и вычитанием, что и в сложении и вычитании без перехода через десяток, для чего рассматриваются следующие темы:

1. Сложение и вычитание на примерах вида:

$$56 + 4, \quad 4 + 56, \quad 60 - 4, \quad 60 - 56$$

2. Сложение и вычитание на примерах вида:

$$37 + 23 \quad 60 - 23$$

3. Сложение и вычитание с переходом через десяток на примерах вида:

$$27 + 8 \quad 35 - 8$$

4. Сложение и вычитание с переходом через десяток на примерах вида:

$$35 + 29 \quad 64 - 29$$

Для соответствующих вычислений, в особенности для вычислений на счетах, требуется прочное знание таблиц разложения числа 10 (круглого десятка).



Соответствующие таблицы должны заучиваться в таких формах:

девять — это десяток без единицы ( $9 = 10 - 1$ );  
один — это десяток без девяти ( $1 = 10 - 9$ );  
восемь — это десяток без двух ( $8 = 10 - 2$ );  
два — это десяток без восьми ( $2 = 10 - 8$ ) и т.д.  
Сложение и вычитание на примерах вида:

$$\begin{array}{r} 56 + 4 \\ 4 + 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 - 4 \\ 60 - 56 \end{array}$$

В решении этих примеров появляется существенно новый элемент — увеличение или уменьшение числа десятков на единицу.

Сначала пример на сложение преобразуется в пример на вычитание:

$$\begin{array}{r} 56 + 4 = \\ (6 + 4 = 10) \\ 50 + 10 = 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 - 4 = \\ (10 - 4 = 6) \\ 50 + 6 = 56 \end{array}$$

Потом можно пример на вычитание ( $80 - 3 = 77$ ) преобразовать в пример на сложение ( $77 + 3 = 80$ ).

Следует уделить значительное время на решение примеров вида:

$$60 - 56$$

Этот пример рассматривается в связи с соответствующим прямым примером на сложение.

Итак, пусть решен пример:

$$56 + 4 = 60$$

Далее составляем пример на обратное действие, на вычитание:  $60 - 56 =$

Рассуждение проводим так:

из 6 десятков вычесть 5 десятков, остается 1 десяток, из которого надо вычесть еще единицы.

В 1 десятке 10 единиц; из 10 единиц вычесть 6 единиц, останутся 4 единицы.

Учащиеся называют окончательный ответ:  
из 60 вычесть 56, получится 4.



После усвоения решения примеров последнего вида становится возможным решение четверок примеров вида:

$$\underline{70, 2, 68}$$

$$\begin{array}{ll} \square + 2 = 70 & \square - 2 = 68 \\ \square + 68 = 70 & \square - 68 = 2 \end{array}$$

Предлагаются деформированные примеры:

$$\begin{array}{lll} 32 + 8 = & 100 - 2 = & \square - 7 = 93 \\ \square - 3 = 50 & 3 + \square = 40 & 82 + \square = 90 \\ \square + 24 = 30 & \square + 97 = 100 & 63 + \square = 70 \\ 30 - \square = 25 & 50 - \square = 36 & 80 \Delta 1 = 79 \end{array}$$

Каждый особый случай сложения и вычитания подкрепляется вычислениями на счетах.

**Сложение и вычитание на примерах вида:**  
 **$37 + 23, 60 - 23$**

Эта тема является обобщением предыдущих тем, и сложение, и вычитание рассматриваются здесь также параллельно с преобразованием примера без изменения чисел:

$$\begin{array}{ll} 37 + 23 = & 60 - 23 = \\ 37 + 20 = 57 & 60 - 20 = 40 \\ 57 + 3 = 60 & 40 - 3 = 37 \end{array}$$

Вторая пара примеров решается в иной последовательности сначала — на вычитание, потом — на сложение:

$$80 - 36 = 44 \quad 44 + 36 = 80$$

Затем решаются отдельные примеры без перестройки.

Иногда предлагается составлять четверки примеров вида:

$$\begin{array}{ll} 90 - 29 = 61 & 29 + 61 = 90 \\ 90 - 61 = 29 & 61 + 29 = 90 \end{array}$$



Решаются также деформированные примеры, например:

$$\begin{array}{ll} \square + 25 = 60 & \square + \square = 40 \\ 100 - \square = 42 & \square - 13 = 27 \\ 63 + 1\square = 80 & \square - 29 = 21 \\ \square - 31 = 49 & 66 + \square = 80 \end{array}$$

В заключение рассмотрим особенности решения примеров вида  $60 - 51$ , в которых разность является однозначным числом. Обычное решение такого примера осуществляется в два этапа:

$$\begin{array}{l} 60 - 51 = \square \\ 60 - 50 = 10 \\ 10 - 1 = 9 \end{array}$$

Психологи обратили внимание на то, что значительно легче такие примеры решать «приемом дополнения».

Рассуждаем так:

Из 10 вычесть 1, получится 9.

От 1 до 10 не хватает 9.

От 11 до 20 не хватает 9.

От 21 до 30 не хватает 9.

Сколько не хватает от 51 до 60?

При этом решение находится короче, как бы одноактно: от 51 до 60 не хватает 9.

Значит, из 60 вычесть 51, получится 9.

При таком решении проявляются ассоциации «прямого направления», связанные с нумерацией, с числовым рядом; если развернуть последнее решение, то рассуждения выглядели бы так: за 5 десятками следуют 6 десятков; от 50 до 60 не хватает 10, от 51 до 60 не хватает 9.

Аналогично могут решаться примеры, в которых вычитаемое заметно близко по величине к уменьшаемому.

Пусть, например, надо решить пример:  $100 - 87 = \square$ .

Рассуждаем так:

Сколько не хватает от 87 до 90? (Не хватает 3.)

Сколько не хватает от 90 до 100? (Не хватает 10.)

Значит, от 87 до 100 не хватает 13 ( $3 + 10 = 13$ ).



$$\text{Итак, } 100 - 87 = 13.$$

Именно таким способом дополнения пользуются довольно часто кассиры: если надо дать сдачи с рубля, а покупка сделана на 87 коп., то сначала сдают 3 коп. (а на счетах к 87 прибавляют 3, получают 90), а потом 10 (на счетах к 90 прибавляют 10, получают 100).

В качестве занимательных примеров повышенной трудности, решение которых связано с точным анализом состава чисел, с правильным соотношением цифр, обозначающих разряды десятков и единиц, с различием понятий «цифра» и «число», можно предложить такие примеры:

$$\begin{aligned} \square 7 + 2\square &= 59 \\ \square 0 - \square 3 &= 42 \\ 7\square - \square 4 &= 4\square \\ \square 8 + 2\square &= 58 \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Иногда эти примеры можно записать столбиком:

$$\begin{array}{r} + \square 7 \\ 2\square \\ \hline 59 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7\square \\ - \square 4 \\ \hline 56 \end{array}$$

и т.д., причем анализ состава чисел и выкладки выполняются, как и в устных вычислениях, начиная со старших разрядов.

### Сложение и вычитание однозначного числа с переходом через десяток

$$27 + 8, 35 - 8$$

При изучении этой темы одновременно рассматриваются сложение и вычитание, причем вначале используется преобразование одного примера в другой, затем решаются изолированные примеры:

$$\begin{aligned} 27 + 8 &= \square & 35 - 8 &= \square \\ 1) \quad 27 + 3 &= 30 & 1) \quad 35 - 5 &= 30 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{ll} 2) (8 - 3 = 5) & II) (8 = 5 + 3) \\ 3) 30 + 5 = 35 & III) 30 - 3 = 27 \end{array}$$

Сравнивая отдельные логические операции, совершенные при решении данных взаимно обратных примеров, мы обнаружим, что здесь совершается замкнутый цикл операций:

$$I \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow I$$

Стало быть, при одновременном изучении двух взаимно обратных действий наиболее отчетливо постигается сущность самих логических операций, взаимно подкрепляющих друг друга.

При этом возникает поневоле противопоставление контрастных понятий и операций.

Так, например, если при сложении в начальной операции мы дополняем первое слагаемое до ближайшего круглого числа ( $27 + 3 = 30$ ), то в начальной операции при вычитании мы соответственно убавляем уменьшаемое до ближайшего меньшего круглого числа ( $35 - 5 = 30$ ).

Учитель должен специально пользоваться служебными понятиями «добавить — убавить», «меньшее число — большее число» и т.п., облегчающими процесс вычислений.

Решаются также и деформированные примеры:

$$\begin{array}{ll} 67 + \square = 75 & \square + \square = 83 \\ \square - 9 = 36 & \square - 19 = 56 \\ 87 - 8 = \square & 80 + \square = 87 \\ \square + 38 = 44 & 54 \Delta 9 = 63 \\ 85 - \square = 79 & 72 \Delta 9 = 63 \end{array}$$

Важно научить учащихся выполнять рассмотренные случаи сложения и вычитания на счетах.

**Сложение и вычитание с переходом через десяток на примерах вида:  $35 + 29$  и  $64 - 29$**

На первом этапе мы преобразуем решенный пример на сложение в пример на вычитание:



$$\begin{array}{r} 35 + 29 = \\ 35 + 20 = 55 \\ 55 + 9 = 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 - 29 = \\ 64 - 20 = 44 \\ 44 - 9 = 35 \end{array}$$

Решение примеров в данной теме основано на применении двух приемов: сложения (или вычитания) круглых десятков из двузначного числа; сложения (или вычитания) однозначного числа с переходом через десяток (этот случай рассмотрен в предыдущем параграфе).

После решения первой пары примеров предлагается пример на вычитание, например:

$$73 - 36 = 37$$

Затем учитель предлагает проверить решение данного примера сложением:

$$37 + 36 = 73$$

Потом решаются изолированные примеры, а также попеременно с обычными и примеры деформированные.

Так, например, в контрольную или самостоятельную работу могут быть включены упражнения вида:

$$82 - \square = 26$$

$$29 + \square = 57$$

$$\square + 39 = 94$$

$$\square - 58 = 25$$

$$\square - 49 = 38$$

$$36 \Delta 29 = 7$$

$$63 + \square = 82$$

$$\square \Delta 18 = 33$$

#### 4. О возможном одновременном изучении действий в пределах 100 и тех же действий над круглыми десятками в пределах 1000

Одновременное изучение взаимно обратных действий (сложения и вычитания, умножения и деления) и взаимно обратных задач имеет следствием как глубокое и прочное усвоение программного материала, так и существенную экономию времени при изучении материала.

В логическом плане одновременное изучение взаимно обратных действий и задач связано с широким использованием в рассуждениях так называемых непо-



средственных умозаключений ( $13 + 2 = 15$  и  $15 - 2 = 13$  и т.п.).

Имеется и другой путь рационализации учебного процесса, который используется в сочетании с первым путем.

Мы здесь имеем в виду возможность и целесообразность одновременного изучения примеров на все действия в пределах 100 с соответствующими примерами над круглыми десятками в пределах 1000:

$$\begin{array}{rcl} 37 + 20 = & 24 \cdot 2 = & \\ 370 + 200 = & 240 \cdot 2 = & \text{и т.п.} \end{array}$$

Рассмотрим подробнее этот вариант\*.

Для формирования числовых представлений и осмысления учащимися вычислительных приемов, как показывает практика, целесообразно шире применять вычисления на счетах (особенно удобны вначале так называемые объемные счеты, в которых единицы разных разрядов представлены объемно различающимися фигурами: единицы — кубиками, десятки — брусками, сотни — квадратными досками; в качестве деталей этих счетов можно использовать элементы арифметического ящика).

Совместное рассмотрение сотни и тысячи основано на широком использовании в логической практике умозаключений по аналогии.

Переходя к такой методике, целесообразно решать на первых порах те примеры, которые возникают при превращении единиц в десятки (приписывание нуля к двузначным числам), а также примеры на сложение и вычитание без перехода через десяток.

Итак, у учащихся целенаправленно формируются следующие системы ассоциаций (связей мыслей):

- в 1 десятке 10 единиц;
- в 1 сотне 10 десятков, или 100 единиц;
- в 1 тысяче 10 сотен, или 100 десятков, или 1000 единиц.

\* При этом варианте изучению действий предваряется изучение нумерации чисел сразу же в пределах 1000.



При заучивании названий чисел следует намеренно создавать связи по сходству:

3 — три единицы — три;  
30 — три десятка — тридцать;  
300 — три сотни — триста.

Условные изображения переходов от единиц к десяткам даются на рисунке 18.

Одновременно с изучением нумерации чисел рассматриваются метрические меры (раздробление и превращение именованных чисел в пределах 1000) и устанавливаются связи между соотношениями разрядных единиц отвлеченных чисел, с одной стороны, и соотношениями между десятичными мерами, с другой стороны.

Предлагаются следующие упражнения:

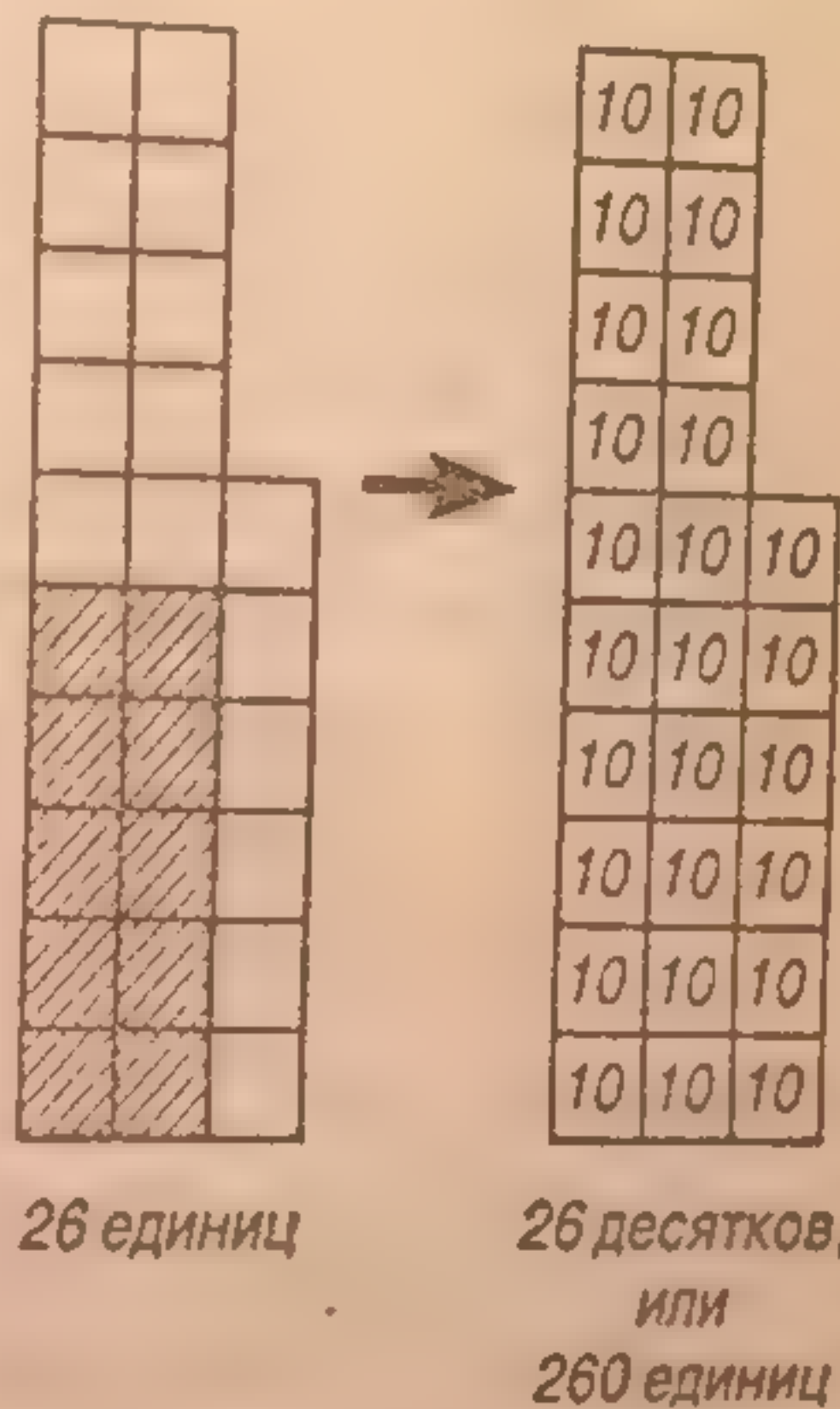


Рис. 18.

1. Сколько единиц в 6 сотнях?
2. Сколько сантиметров в 6 м?
3. Сколько копеек в 6 руб.?
4. Сколько килограммов в 6 ц?

## II

1. Какое число составляют 7 сотен 5 десятков и 4 единицы?
2. Сколько копеек составляют 7 руб. 5 гривенников и 4 коп.?
3. Сколько сантиметров составляют 7 м 5 дм и 4 см?
4. Сколько килограммов составляют 7 ц и 54 кг?

\* Данные задания образуют некоторую общность, единство тем, что у них имеется общая цифра 6.



Такие упражнения можно предложить в объединенной записи:

$$\begin{array}{c}
 1 \text{ } \begin{array}{c} \text{м} \\ \text{руб.} \\ \text{ц} \end{array} = 100 \dots \dots \\
 2 \text{ } \begin{array}{c} \dots \dots \\ \text{руб.} \\ \dots \dots \end{array} \quad 68 \text{ } \begin{array}{c} \text{см} \\ \dots \dots \\ \text{кг} \end{array} = 268 \text{ } \begin{array}{c} \text{см} \\ \text{коп.} \\ \text{кг} \end{array}
 \end{array}$$

### III

1.  $\square$  ед. = 5 сот. 36 ед.
2.  $681 = \square$  сот.  $\square$  ед.
3.  $\square$  коп. = 6 руб. 79 коп.
4. 807 коп. =  $\square$  руб.  $\square$  коп.
5.  $\square$  см = 4 м 36 см
6. 392 см =  $\square$  м  $\square$  см

Важно добиться от учащихся автоматизации двусторонних переходов вида:

- 7 десятков — семьдесят единиц  
 8 десятков — . . . единиц  
 . . . десятков — девяносто единиц  
 20 десятков — . . . единиц  
 . . . десятков — четыреста единиц  
 65 десятков — . . .  
 . . . десятка — восемьсот двадцать

- 72 грив. =  $\square$  коп.  
 $\square$  грив. = 820 коп.  
 20 дм =  $\square$  см  
 $\square$  дм = 800 см  
 9 руб. =  $\square$  коп.  
 $\square$  руб. = 700 коп.  
 5 ц =  $\square$  кг  
 $\square$  ц = 600 кг

При изучении нумерации трехзначных чисел надо помнить о необходимости сочетания структурно противоположных заданий.

Так, при работе над разрядами сотен, десятков и единиц предлагаются попеременно задания по чтению чисел, записанных цифрами, и записи цифрами чисел, написанных словами. Приведем такое задание.



Сотни	Десятки	Единицы	
	3	4	Тридцать четыре
3	4	0	Триста сорок
	6	9	
			Семьдесят один
	5	8	
5	8	0	
			Шестьдесят семь
			Шестьсот семьдесят
3	9	6	
			Пятьсот шестьдесят девять
7	0	0	
4	0	7	Четыреста семь
4	8	0	
			Восемьсот один
			Шестьсот пятьдесят

Дописать недостающие числа цифрами или прочитать числа, записанные цифрами. Отложить эти числа на счетах.

Нумерацию и простейшие случаи сложения и вычитания следует рассматривать одновременно, используя как обращение (по горизонтали), так и обобщение (по вертикали) суждений:

$$\begin{array}{rcl} 3 + 5 & 8 - 5 \\ 30 + 50 & 80 - 50 \\ 300 + 500 & 800 - 500 \end{array}$$

Противопоставляются также следующие группы примеров:

$$\begin{array}{rcl} 30 + 40 & 76 - 40 \\ 300 + 400 & 760 - 400 \end{array}$$

Решение этих примеров должно осуществляться двумя способами, причем сравниваются решения сходных примеров в пределах 100 и 1000;



# I способ:

$$\underline{36 + 40 = 76}$$

$$\underline{360 + 400 = 760}$$

$$30 + 40 = 70$$

$$300 + 400 = 700$$

$$70 + 6 = 76$$

$$700 + 60 = 760$$

К 3 десяткам прибавить 4 десятка, будет 7 десятков. К 7 десяткам прибавить 6 единиц, будет 76.

К 3 сотням прибавить 4 сотни, будет 7 сотен. К 7 сотням прибавить 6 десятков, будет 7 сотен и 6 десятков, т.е. 760.

## II способ:

$$\underline{36 + 40 = 76}$$

$$\underline{360 + 400 = 760}$$

Объяснение, как и в предыдущем случае.

$$36 \text{ д.} + 40 \text{ д.} = 76 \text{ д.} = 760$$

360 — это 36 десятков.

400 — это 40 десятков.

36 десятков да 40 десятков, будет 76 десятков, или 760.

Нужно позаботиться также о том, чтобы у учащихся возникли, как говорят психологи, обобщенные или правилосообразные связи. В этих целях учитель предлагает следующие упражнения по преобразованию одного примера в другой.

Пусть решен пример:

$$43 + 25 = 68$$

Учитель. Припишите справа к каждому слагаемому один нуль и прочитайте новый пример ( $430 + 250 = 680$ ).

Другой пример:  $890 - 600 = 290$ .

Учитель. Зачеркните в каждом числе справа один нуль и прочитайте полученный пример ( $89 - 60 = 29$ ).

Так же могут быть рассмотрены как сложение и вычитание без перехода через десяток ( $521 + 274$ ,  $795 - 274$ ), так и всевозможные случаи сложения и вычитания круглых десятков:

$$37 + 56$$

$$370 + 560$$

$$93 - 56$$

$$930 - 560$$



$$936 - 500$$

$$936 - 506 \text{ и т.п.}$$

В связи с устным решением примеров на сложение и вычитание в пределах 100 удобно одновременно решать также задачи и примеры (устно!) с именованными числами.

Например:

$$2 \text{ м } 6 \text{ дм} + 3 \text{ м } 2 \text{ дм}$$

$$9 \text{ дм } 8 \text{ см} - 6 \text{ дм } 7 \text{ см}$$

$$9 \text{ м } 5 \text{ дм} - 27 \text{ дм} =$$

$$= 9 \text{ м } 5 \text{ дм} - 2 \text{ м } 7 \text{ дм} = 6 \text{ м } 8 \text{ дм.}$$

Если же рассматриваются и соответствующие случаи центра «Тысяча», то надо решать примеры, приводящиеся к трехзначным числам:

$$8 \text{ м } 60 \text{ см} - 3 \text{ м } 40 \text{ см}$$

$$8 \text{ руб. } 50 \text{ коп.} + 1 \text{ руб. } 20 \text{ коп.}$$

$$2 \text{ руб. } 60 \text{ коп.} - 90 \text{ коп.}$$

$$3 \text{ м } 2 \text{ дм } 1 \text{ см} + 5 \text{ м } 6 \text{ дм } 3 \text{ см}$$

$$9 \text{ м } 8 \text{ дм } 7 \text{ см} - 6 \text{ м } 3 \text{ дм } 4 \text{ см и т.п.}$$

## 5. О работе над понятиями «равенство», «уравнение» и «неравенство»

При изучении действий первой ступени (сложения и вычитания) в пределах 100 одновременно с овладением новых числовых соотношений систематически ведется работа по повторению и закреплению математических понятий «равенство», «неравенство», «уравнение».

### Работа над понятием «равенство»

Смысл понятий «равенство» постигается в результате многократного употребления термина в разных смысловых связях.

Рассмотрим равенства:  $5 + 3 = 8$ ;  $8 - 2 = 6$ .

В равенстве имеются две части (два выражения): левая часть (например,  $5 + 3$ ) и правая часть (соответственно 8).

Обе части равенства можно поменять местами:



если  $5 + 3 = 8$ , то  $8 = 5 + 3$ .

Можно впоследствии употреблять слово «выражение»:  $8$  — это выражение,  $5 + 3$  — выражение.

В равенстве два выражения соединяются знаком равенства ( $=$ ).

Если два выражения не равны друг другу, то их соединяют знаком неравенства, например  $5 \neq 8$ .

Впоследствии следует четко различать знак «не равно» ( $\neq$ ) от двух знаков «неравенства»: меньше ( $<$ ), больше ( $>$ ).

Уместны упражнения по преобразованию одного равенства в другое. Приведем пример.

Пусть даны два равных числа:  $7 = 7$ .

Левую часть, левое выражение ( $7$ ) заменим суммой двух слагаемых (представим в виде суммы двух слагаемых). Задача имеет несколько решений:

$$\begin{aligned}\square + \square &= 7 \\ 3 + 4 &= 7 \\ 5 + 2 &= 7 \\ 6 + 1 &= 7 \\ 7 + 0 &= 7 \text{ и т.д.}\end{aligned}$$

Дети с интересом выполняют упражнения логического характера.

Среди следующих примеров найдите верные и неверные равенства. В неверных равенствах замените знак равенства ( $=$ ) знаком неравенства ( $\neq$ ):

$$\begin{array}{ll} 5 + 2 = 7 & 9 - 7 = 2 \\ 6 + 3 = 8 & 10 - 6 = 5 \end{array}$$

Решение:

$6 + 3 = 8$ . Это неверное равенство. Надо написать:  $6 + 3 \neq 8$ .

$10 - 6 = 5$ . Это неверное равенство. Надо написать:  $10 - 6 \neq 5$ .

Иногда следует давать задания по составлению равенств, удовлетворяющих определенным условиям:

Написать равенство, чтобы правая часть была  $7$ , а левая была разностью. (Ответ:  $\square - \square = 7$ ,  $10 - 3 = 7$  и др.).



Написать равенство, чтобы в левой части стояло число 6, а в правой — сумма чисел. (Ответ:  $6 = 4 + 2$  и др.).  
 Написать равенство, чтобы в левой части стоял знак (+), а в правой — знак (—).  $\square + \square = \square - \square$ . (Ответ:  $3 + 1 = 6 - 2$  и др.)

### Работа над понятием «уравнение»

Учитель должен ознакомить учащихся с понятием «уравнение» и время от времени повторять его в таких формах: «равенство, в котором имеется неизвестное число  $x$ , называется уравнением»; «равенство, в котором требуется найти значение неизвестного  $x$ , называется уравнением», «если в равенстве искомое число обозначается буквой, то его называют уравнением» и т.д.

В ходе обучения учащиеся должны употреблять в своей речи обороты: «Я решил уравнение», «Мы нашли корень уравнения», «Число 5 — корень уравнения» и т.п., а также указать, что в уравнении знак равенства пишется один раз.

Рассмотрим записи решений простейших уравнений:

$$\begin{aligned} x + 20 &= 64 \\ x &= 64 - 20 \\ x &= 44 \end{aligned}$$

Чтобы найти неизвестное слагаемое ( $x$ ), надо из суммы (64) вычесть известное слагаемое (20).

$$\begin{aligned} 92 - y &= 58 \\ y &= 92 - 58 \\ y &= 34 \end{aligned}$$

Чтобы найти неизвестное вычитаемое ( $y$ ), надо из уменьшаемого (92) вычесть разность (58).

$$\begin{aligned} a - 20 &= 80 \\ a &= 80 + 20 \\ a &= 100 \end{aligned}$$

Чтобы найти неизвестное уменьшаемое ( $a$ ), надо к разности (80) прибавить вычитаемое (20).

Приведенные правила, повторение которых полезно на первых порах, постепенно свертываются; так, после изучения алгебры эти правила заменяются еще более формализованными алгоритмами, выполняемыми автоматически.

Восьмиклассник уже не оперирует указанными выше многословными правилами, т.е. понятиями «уменьшаемое», «слагаемое» и т.д.; он фиксирует внимание на



знаках чисел и взаимном положении неизвестных и известных, пользуясь едиными правилами переноса членов уравнения из одной части в другую.

Примечание. Требуется специального изучения вопроса о раннем ознакомлении учащихся младших классов с этими правилами — свойствами уравнений, т.е. с алгоритмами низшего уровня, облегчающими переработку информации, быть может, даже до изучения множества рациональных чисел.

При изучении уравнений уже в младших классах полезно предлагать упражнения не только по решению готовых упражнений или по составлению уравнений в связи с решением задачи (о чем речь пойдет ниже), но и по восстановлению уравнений по некоторым элементам процесса решения.

Приведем примеры.

Восстановить исходное уравнение:

1)  $\dots = 20$

$$b = 64 - 20$$

$$b = 44$$

3)  $\dots - 15 = \dots$

$$c =$$

$$c = 30$$

2)  $\dots = 64$

$$a = 64 - 20$$

$$a = 44$$

4)  $\dots = 53$

$$x = \dots +$$

$$x = 63$$

### Работа над понятием «неравенство»

Учащиеся должны свободно справляться с такими заданиями: «Напиши неравенство: 27 больше 20», «Прочитай неравенства:  $45 > 38$ ;  $10 < 100$ » и т.д.

Нужно научить учащихся читать равенства и неравенства в двух направлениях:

$$3 + 2 = 5 \text{ (3 да 2 равно 5; 5 равно сумме чисел 3 и 2);}$$

$$3 \neq 5 \text{ (3 не равно 5; 5 не равно 3);}$$

$$3 < 5 \text{ (3 меньше 5; 5 больше 3).}$$

Учащиеся с интересом решают деформированные примеры с неравенствами, в которых вместо неизвестных чисел (квадратики) вставляются соответствующие решения:

$$\square < 98$$

$$27 < \square < 35$$

$$37 > \square$$

$$43 < \square < 45$$

$$27 > \square > 23$$

$$\square > 49 \text{ и т.п.}$$



Большой интерес вызывает у них и нахождение числа всех решений неравенства, например:

1. Сколько решений имеет неравенство:  $\square < 52$ ?

Ответ: 0, 1, 2, 3, 4, ..., 51. Всего 52 решения.

2. Сколько решений имеют неравенства:  $40 < \square < 47$ ?

Ответ: 41, 42, 43, 44, 45, 46. Всего 6 решений.

Можно также предлагать задания, в которых требуется словесную информацию изобразить символически, используя знак неравенства.

Например:

1. Даны два равных числа:  $30 = 30$ .

К левой части прибавили число 2, а правую часть оставили без изменения. Какая часть после этого будет больше: левая или правая?

Ответ написать в виде неравенства.

Ответ:  $30 + 2 > 30$ .

Предлагаем тут же обобщенное задание — сравнить два выражения:

$$30 + x \Delta 30$$

Вместо треугольника поставить знак сравнения:

$$30 + x > 30$$

Поставить соответствующий знак сравнения между следующими выражениями:  $b + 10 \Delta b$ , где требуется проверить неравенство  $b + 10 > b$  для нескольких значений числа  $b$ .

2. Брат и сестра имели по 30 коп. Запишем это так:

$$30 = 30$$

Брат израсходовал  $a$  коп., а сестра не тратила деньги. Сколько теперь денег у брата? у сестры? У кого денег меньше? Записать ответ в виде неравенства.

Ответ:  $30 - a < 30$ .

Полезно проверить неравенство при некоторых числовых значениях  $a$ :

$$a = 3$$

$$30 - 3 < 30$$

$$27 < 30$$

$$a = 5$$

$$30 - 5 < 30$$

$$25 < 30 \text{ и т.д.}$$



3. У Зины были красная и синяя ленты, по  $x$  см каждая. От синей ленты отрезали 20 см. Какова теперь длина синей ленты? красной ленты? Какая лента теперь короче? длиннее? Записать решение задачи в виде неравенства:

$$x - 20 < x$$

Можно предлагать учащимся заполнять таблицу, составляя сложное (двойное) неравенство:

$$\begin{array}{c} c - 3 < c < c + 3 \\ 27 < 30 < 33 \\ 28 < 31 < 34 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

Полезны упражнения и по переходу от равенства к неравенству и обратно от неравенства к равенству, например:

1) Дано равенство:  $26 + 70 = 96$ .

Написать соответствующие неравенства с данными числами.

Ответ:  $26 < 96$ ;  $70 < 96$ .

2) Дано равенство:  $30 + 56 + 12 = 98$ .

Написать соответствующие неравенства.

Ответ:  $30 < 98$ ;  $56 < 98$ ;  $12 < 98$ .

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И ВЫВОДЫ

1. Классификация (действие) на

Все разнообразие задач удобно представлять в каждом цикле

Основу системы задач на нахождение

второй цикл — это уменьшаемого и в

цикл — задачи на несколько единиц и

В предыдущем из классников дост

сформированных пр  $1 + 1 = 6$  вперед  $2 + 3$ ;  $5 + 1$ .

Столь же естественное изучение сумм и неиз

задач, также цел задач на нахождение за ними задач

Из третьего цикла числа на не

\* В последующей классификации



## Глава IV

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ

### 1. Классификация простых задач (в одно действие) на сложение и вычитание

Все разнообразие простых задач на сложение и вычитание удобно представить в виде трех циклов, по три задачи в каждом цикле.

Основу системы задач составляет первый цикл — задачи на нахождение суммы и неизвестного слагаемого; второй цикл — это задачи на нахождение разности, уменьшаемого и вычитаемого; третий, решающий цикл — задачи на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц и на разностное сравнение чисел\*.

В предыдущем изложении мы показали, что для первоклассников доступно и целесообразно решение деформированных примеров (упражнений) вида  $2 + \square = 5$ ;  $\square + 1 = 6$  попеременно с обычными примерами вида  $2 + 3$ ;  $5 + 1$ .

Столь же естественным и выгодным оказывается совместное изучение соответствующих задач на нахождение суммы и неизвестного слагаемого — первого цикла задач, также целесообразно одновременное изучение задач на нахождение разности и уменьшаемого, а вслед за ними задач на нахождение вычитаемого — второй цикл.

Из третьего цикла задачи на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц также рассматриваются

---

\* В последующем изложении увидим целесообразность аналогичной классификации простых задач и на действия второй степени.



совместно, а на их основе и задачи на разностное сравнение чисел.

Так мы приходим к следующей исходной классификации простых задач на сложение и вычитание, изучаемых в I классе.

Цикл	Задачи на сложение	Задачи на вычитание	
		Задачи на сложение	Задачи на вычитание
I	Нахождение суммы (прямая задача)	Нахождение 1-го слагаемого (1-я обратная задача)	Нахождение 2-го слагаемого (2-я обратная задача)
II	Нахождение уменьшаемого (1-я обратная задача)	Нахождение остатка (прямая задача)	Нахождение вычитаемого (2-я обратная задача)
III	Увеличение числа на несколько единиц (прямая задача)	Уменьшение числа на несколько единиц (1-я обратная задача)	Разностное сравнение (2-я обратная задача)

В этой классификации мы назвали условно прямой задачей ту, которая логически проще остальных двух задач и потому изучается как первоначальная из трех задач того или иного цикла.

В дальнейшем изложении мы прямой задачей назовем любую задачу группы взаимнообратных задач, которая рассматривается как исходная.

Согласно этой классификации прямая задача и 1-я обратная задача изучаются на одних и тех же уроках в постоянном преобразовании друг в друга; 2-я обратная задача изучается на основе этой совместно изученной пары задач.

Завершающим этапом работы над задачами становится решение всей тройки задач с общим условием.

## 2. Одновременное изучение задач на нахождение суммы и слагаемого

В дальнейшем изложении мы рассмотрим методику одновременного изучения взаимосвязанных задач во



II классе (основные положения этой методики применимы в I классе).

При изучении обратной задачи сначала рассмотрим прямую задачу, чтобы, преобразовав ее, получить обратную задачу.

Прямая задача. Отец дал Мише 12 яблок, а мать добавила еще 5 яблок. Сколько всего яблок дали Мише?  
Решение:  $12 + 5 = 17$  (ябл.).

Составление и решение обратной задачи осуществляется устно.

Учитель. Какие числа были даны в задаче?

Ученик. В задаче были даны числа 12 яблок, 5 яблок.

Учитель. Какое же число мы нашли после решения задачи?

Ученик. Мы нашли число 17 яблок.

Учитель. Запишем эти три числа рядом:

12 яблок; 5 яблок; 17 яблок.

Решение:  $12 + 5 = 17$  (яблок).

Составим новую задачу, для чего неизвестным сделаем одно из двух чисел, например 12 яблок ( $\square$ ; 5 яблок; 17 яблок).

Учитель показывает поочередно на числа, а учащийся формулирует условие обратной задачи, ориентируясь на имеющиеся числа:

Отец дал Мише несколько яблок, мать — 5 яблок. Всего у Миши оказалось 17 яблок. Сколько яблок дал Мише отец? (Если в схеме имеется квадратик, то соответственно говорим: несколько.)

На доске появляются схемы двух задач с их решениями.

Прямая задача

12 ябл., 5 ябл.,  $\square$  ябл.

Решение

$12 \text{ ябл.} + 5 = 17 \text{ (ябл.)}$

Обратная задача

$\square$  ябл., 5 ябл., 17 ябл.

Решение

$17 - 5 = 12 \text{ (ябл.)}$

Затем процессы решения данных задач сравниваются: обе задачи в одно действие; если прямая задача



решена действием сложения, то обратная решена действием вычитания.

Введение обратной задачи не изолированно от прямой и имеет свои положительные стороны:

1) учащиеся не только знакомятся с новой задачей, но и повторяют старое, т.е. ту задачу, преобразованием которой получена данная задача;

2) учащиеся усваивают связи между задачами; умозаключения здесь осваиваются в цикле, во взаимопереходах друг в друга.

Во второй паре следует вначале предложить задачу на нахождение неизвестного слагаемого, а затем преобразовать ее в задачу на нахождение суммы:

У Сергея было несколько тетрадей в клетку и 13 тетрадей в линейку. Всего у него было 19 тетрадей. Сколько было тетрадей в клетку?

Читаем условие задачи: «У Сергея было несколько тетрадей в клетку». Сколько было этих тетрадей — неизвестно.

Нарисуем вместо неизвестного числа клетку. Читаем дальше: «...и 13 тетрадей в линейку» (пишем рядом с клеткой число 13).

«Всего же у него было 19 тетрадей». Рядом написаны числа ?, 13, 19.

Учитель. Когда же и при каком действии получится 19? Кто расставит знаки? (На доске появляется уравнение:  $\square + 13 = 19$ .)

Учитель. Как решить эту задачу?

Ученик. К 6 прибавить 13, получится 19 (!?)

Так чаще всего отвечают первоклассники. Этот ответ показывает, что процесс решения задачи вначале обязательно проходит через этап проявления прямой связи. Восприятие смыслового оборота («было несколько тетрадей в клетку и 13 в линейку») завершается мыслью о сложении:  $\square + 13 = 19$ . (Иначе говоря, грамматический союз «и» наводит на мысль о сложении; возникает ассоциация «и» → «плюс».) Дальнейшее решение сводится к подбору неизвестного слагаемого.

Решение задачи с помощью уравнения выполняется следующим рассуждением:



учитель. У Сергея было несколько тетрадей в клетку.

Обозначим число тетрадей в клетку какой-нибудь буквой (например, буквой  $a$ ). Сколько же тетрадей было у Сергея?

ученик. У Сергея было  $a$  тетрадей.

учитель. У Сергея было еще 13 тетрадей в линейку. Сколько всего тетрадей (в клетку и в линейку вместе) у Сергея?

Ученик. У Сергея было  $a + 13$  тетрадей.

учитель. Как по-другому сказано об общем числе тетрадей у Сергея?

Ученик. У Сергея было всего 19 тетрадей.

учитель. Составим уравнение:

$$a + 13 = 19$$

учитель. Назовите числа в этом уравнении.

Ученик. Число  $a$  — первое слагаемое, число 13 — второе слагаемое, число 19 — сумма.

учитель. Как найти неизвестное слагаемое?

Ученик. Надо из суммы вычесть известное слагаемое.

Решение уравнения записывается столбиком:

$$a + 13 = 19$$

$$a = 19 - 13$$

$$a = 6 \text{ (тетр.)}$$

Ответ. У Сергея было 6 тетрадей в линейку.

Задание по самостоятельному составлению задачи целесообразнее давать по уравнению.

Например: «Составить задачу, условие которой выражается так:  $12 - \square = 5$ ».

По форме записи  $12 - \square = 5$  дети догадываются о структуре задачи. К тому же ученик, составив задачу, вынужден дальше решать ее, поскольку уравнение не есть еще решение, а лишь первый шаг к решению.

Говоря по-другому, между уравнением и задачей существует непосредственная связь, а между задачей и соответствующим примером — решением — более сложная опосредствованная связь. Отсюда еще раз видно, что необходимо идти от условия задачи к ее решению через уравнение.



В дальнейших упражнениях делаются переходы и в другом направлении: в качестве первой задачи предлагается задача на нахождение неизвестного слагаемого, которая преобразуется в задачу на нахождение суммы.

Рассмотрим задачу:

У Миши была монета в 5 коп. и еще одна монета. Всего у него было 7 коп. Какая была вторая монета?

Решение:

$$\begin{aligned}5 + x &= 7 \\ x &= 7 - 5 \\ x &= 2 \text{ (коп.)}\end{aligned}$$

Условие решенной задачи записывается в виде схемы:

5 коп., 2 коп., 7 коп.

Затем составляется схема обратной задачи:

5 коп., 2 коп.,

По записанным числам формулируется условие этой задачи:

У Миши были две монеты: 5 коп. и 2 коп. Сколько всего денег было у Миши?

Решение:

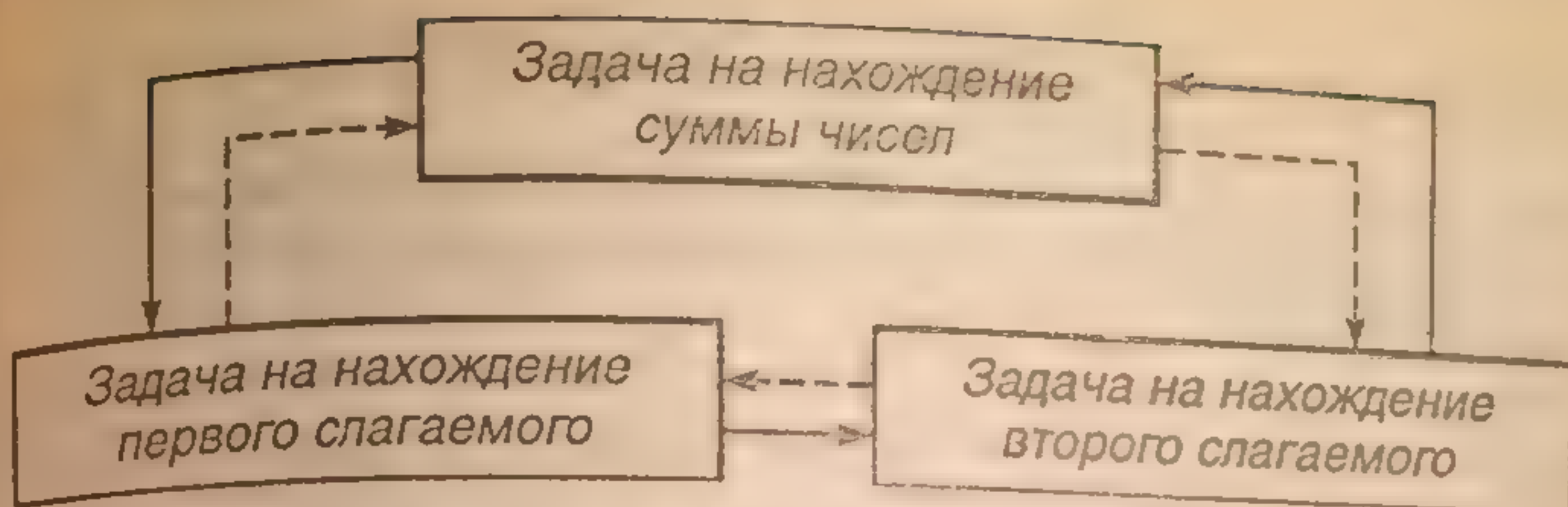
$$5 + 2 = 7 \text{ (коп.)}$$

Если вначале методом изучения задач было решение пар задач с общим сюжетом и общими числами ( $15 - 12 = 3$ ;  $12 + 3 = 15$ ), то в ходе изучения темы предлагаются, конечно, и изолированные (одиночные) задачи.

Однако в этом случае характер умозаключений меняется: хотя явно мы ограничиваемся как будто решением лишь одной задачи (допустим,  $4 + 3 = 7$ ), но оно неявно равносильно решению всего цикла из трех задач ( $7 - 3 = 4$ ,  $7 - 4 = 3$ ). Таков эффект метода раннего укрупнения посредством решения группы взаимосвязанных задач.

В результате применения описанного метода взаимно обратных задач возникает замкнутая связь операций по решению первой тройки задач. Каждая задача данного цикла приобретает особое качество: она выступает как «представитель» всей тройки задач.





Иначе говоря, при применении данной методики решение любой задачи тройки равносильно решению любой другой задачи этой тройки.

Так происходит обобщение приемов рассуждения, слияние взаимосвязанных видов задач в определенный цикл задач.

### 3. Задачи на нахождение разности, уменьшаемого и вычитаемого

#### Одновременное решение задач на нахождение разности и уменьшаемого

Пусть учащимся предложена следующая прямая задача (на нахождение разности):

У Нины было 17 коп. Она купила конфет на 7 коп. Сколько денег у нее осталось?

Решение:

$$17 - 7 = 10 \text{ (коп.)}$$

Далее учитель ведет следующую беседу:

Учитель. Какие числа были даны в задаче?

Ученик. В задаче были даны числа 17 коп., 7 коп., 10 коп.

Учитель. Разве число 10 коп. тоже было известно?

Мы нашли число 10 коп. после решения задачи. Значит, число 10 коп. не было дано в условии задачи. Это число заключаем в квадратик. Записываем схему прямой задачи:

17 коп.; 7 коп.; 10 коп.

Учитель. А теперь составим обратную задачу, для этого сделаем неизвестным число 17 коп., а два других числа будут известны:



$\square$ ; 7 коп.; 10 коп.

Искомое, неизвестное число обозначим квадратиком.  
Учащиеся по этой записи формулируют условие об-  
ратной задачи:

У Нины было несколько копеек. Она купила конфет на  
7 коп., после этого у нее осталось 10 коп. Сколько было  
денег у Нины до покупки?

Подробная беседа по схеме выглядит так:

Учитель. Сколько копеек было у Нины?

Ученик. Мы этого не знаем. У нее было несколько  
копеек. Поэтому поставим вместо неизвестного числа  
квадратик.

Учитель. Сколько денег она истратила?

Ученик. Нина истратила 7 коп.

Учитель. Сколько денег у нее осталось?

Ученик. У Нины осталось 10 коп.

Учитель. Какой же вопрос задачи?

Ученик. Сколько денег было первоначально?

На доске написаны рядом три числа:

$\square$  коп.; 7 коп.; 10 коп.

Учитель. Чтобы решить задачу, надо эти числа свя-  
зать знаками. Если человек уплатил деньги (истратил  
деньги), то у него денег становится больше или меньше?

Ученик. Денег становится меньше.

Учитель. Какое же действие нам надо выполнить?  
Какое число нам надо вычесть? Сколько же получится?

На доске записывается условие задачи (знаки вычи-  
тания и равенства может написать вызванный ученик):

$$\square - 7 = 10$$

Учащиеся читают: «Из нескольких копеек вычесть  
7 коп., останется 10 коп».

Учитель. У Нины осталось 10 коп. да еще она истра-  
тила 7 коп. Сколько же денег у нее было вначале?  
Больше или меньше, чем 10 коп.? Почему было больше?  
На сколько больше? Как узнать, сколько денег было  
вначале?

Ученик. К 10 коп. прибавить 7 коп., получится 17 коп.  
У Нины было 17 коп.



На доске и в тетрадах записываются рядом решения двух задач.

Прямая задача

17 коп., 7 коп.,  $\square$

Решение

$$17 - 7 = 10 \text{ (коп.)}$$

Обратная задача

$\square$ , 7 коп., 10 коп.

Решение

$$10 + 7 = 17 \text{ (коп.)}$$

Затем решения данных задач сравниваются: если прямая задача решена действием вычитания, то обратная задача — действием сложения.

Следующую пару задач можно предложить в обратной последовательности: сначала — задачу на нахождение неизвестного уменьшаемого, а потом предложить преобразовать ее в задачу на определение разности.

Из мешка отсыпали 12 кг муки. После этого в мешке осталось 3 кг муки. Сколько килограммов муки было в мешке первоначально?

Учитель. Сколько килограммов муки было вначале, мы не знаем. Поэтому изобразим неизвестное число квадратиком. Из мешка взяли 12 кг муки. Какое действие надо выполнить, если из мешка взяли, отсыпали?

Ученик. Надо вычесть. Надо написать знак «минус».

Учитель. Сколько же килограммов взяли? Сколько килограммов осталось? Как написать уравнение?

Записывается следующее равенство:

$$\square - 12 = 3$$

Решение:

$$3 + 12 = 15 \text{ (кг)}:$$

После решения задача на нахождение уменьшаемого преобразуется в задачу на нахождение разности:

В мешке было 15 кг муки. Из нее взяли 12 кг муки. Сколько килограммов муки осталось?

В тетрадах появляется параллельная запись двух задач:



Прямая задача

$$15 - 12 = 3 \text{ (кг)}$$

Обратная задача

$$\square - 12 = 3$$

$$3 + 12 = 15$$

Впоследствии решение обратной задачи может быть записано с обозначением неизвестного числа буквой, например, так:

Схема обратной задачи:  $x$ , 12, 3

Решение:

$$x - 12 = 3$$

$$x = 12 + 3$$

$$x = 15 \text{ (кг)}$$

### Задачи на нахождение вычитаемого

Вслед за задачами на нахождение разности и уменьшаемого необходимо изучить последнюю задачу из данной тройки — задачу на нахождение неизвестного вычитаемого.

Задачу на нахождение вычитаемого надо вводить через решение прямой задачи (на нахождение разности).

Пусть решается задача:

К обеду в столовой было подано 16 кг хлеба. За обедом съели 11 кг хлеба. Сколько хлеба осталось после обеда?

Решение:

$$16 - 11 = 5 \text{ (кг)}$$

Записываем схему решенной задачи:

$$16, 11, \boxed{5 \text{ кг}}$$

Предлагается учащимся составить обратную задачу по схеме:

$$16 \text{ кг}, \square, 5 \text{ кг}$$

Первоклассники формулируют условие этой задачи:

К обеду в лагере было подано 16 кг хлеба. После обеда осталось 5 кг хлеба. Сколько килограммов хлеба съели за обедом?

Учитель. Сколько же было подано хлеба к обеду?



ученик. К обеду было подано 16 кг хлеба.  
учитель (записывает: 16 кг). Сколько же килограммов съели за обедом?

ученик. Мы не знаем, сколько съели за обедом.

учитель рядом с числом 16 кг пишет квадратик, изображающий отсутствующее число:

$$16, \square$$

учитель. Если было 16 кг, а съели столько-то (указывает на квадратик), то сколько же осталось хлеба?

ученик. Осталось после обеда 5 кг.

учитель. Как же связать эти три числа? Какие действия надо выполнить? Какие знаки надо написать?

Записывается равенство:

$$16 - \square = 5$$

Следующие рассуждения приводят к решению уравнения:

учитель. Сколько хлеба было подано к обеду?

ученик. К обеду было подано 16 кг хлеба.

учитель. А съели за обедом хлеба больше, чем 16 кг, или меньше?

ученик. Съели хлеба меньше, чем 16 кг.

учитель. Сколько же хлеба осталось после обеда? Что же сделали с остальным хлебом? Из каких слагаемых состоит число 16 кг?

ученик. Из 5 кг и еще какого-то числа.

учитель. Как ты раньше нашел число 16 кг?

ученик. К 11 прибавил 5, получил 16.

учитель. А еще как можно найти число 11? Как можно найти это число действием вычитания?

ученик. Из 16 вычесть 5, получится 11.

Окончательно на доске и в тетрадях оформляется параллельная запись решения обеих задач:



Прямая задача

16 кг, 11 кг,  $\square$

Решение

$$16 - 11 = 5 \text{ (кг)}$$

Обратная задача

16 кг,  $\square$ , 5 кг

Решение

$$16 - \square = 5 \text{ (кг)}$$

$$16 - 5 = 11 \text{ (кг)}$$

Впоследствии решение обратной задачи оформляется с помощью неизвестных ( $x$ ,  $y$ ,  $a$  и т.д.).

Обратная задача: 16 кг,  $a$  кг, 5 кг.

Решение:

$$16 - a = 5$$

$$a = 16 - 5$$

$$a = 11 \text{ (кг)}$$

Вторая пара задач решается в другой последовательности: сначала — задача на нахождение неизвестного вычитаемого, а потом — на нахождение разности.

Рассмотрим задачу:

На реке плавало 10 гусей. Когда улетело несколько гусей, на реке осталось 3 гуся. Сколько гусей улетело?

Решение:

$$10 - \square = 3$$

$$10 - 3 = 7$$

Записываем схему решенной задачи:

10 г.,  $\square$ , 3 г.

Составляем схему обратной задачи на нахождение остатка:

10 г., 7 г.,  $\square$

Учащиеся формулируют ее условие:

На реке плавало 10 гусей. Из них улетело 7 гусей. Сколько гусей осталось на реке?

Решение:

$$10 - 7 = 3 \text{ (г.)}$$

В конце изучения данной темы необходимо иногда решать изолированные задачи без составления к ним обратных задач, а иногда решать даже все 3 взаимосвязанные задачи.



Например, к последней паре задач можно составить третью задачу на нахождение неизвестного уменьшаемого.

Схема задачи:

$$\square, 7 \text{ г.}, 3 \text{ г.}$$

Условие задачи:

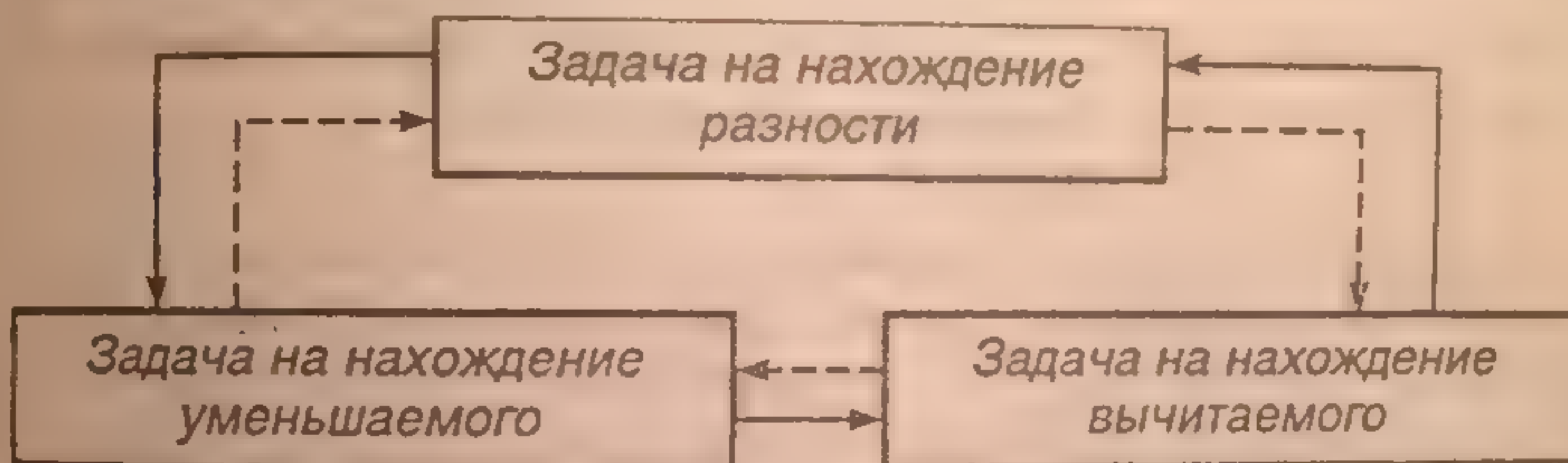
На реке плавало несколько гусей. Когда с реки улете-  
ло 7 гусей, на реке осталось 3 гуся. Сколько гусей  
плавало на реке первоначально?

Решение:

$$\square - 7 = 3$$

$$3 + 7 = 10 \text{ (г.)}$$

Так создается замкнутая система связей, соединяю-  
щих три задачи данного цикла:



На первых порах изучения данных задач нужно пока-  
зать логическую сущность их содержания в виде игры с  
небольшим числом предметов.

### Задачи на нахождение разности

В ящик кладут 12 карандашей. Вызванный ученик  
вынимает из ящика 3 карандаша и отдает их учительни-  
це. Учащиеся сначала находят вычислением, сколько  
осталось в ящике карандашей. Затем ответ проверяют  
пересчетом оставшихся карандашей. (В ящике оказыва-  
ется 9 карандашей.) Действительно,  $12 - 3 = 9$ .

### Задачи на нахождение уменьшаемого

Учитель кладет в ящик неизвестное число каранда-  
шей. Один ученик берет оттуда 5 карандашей и отходит,



другой вынимает оставшиеся карандаши и пересчитывает их (9 карандашей).

По ходу практических операций на доске постепенно записывается уравнение:

Сколько было карандашей — неизвестно ( $y$ ).

Взяли 5 карандашей ( $y - 5$ ).

Осталось 9 карандашей ( $y - 5 = 9$ ).

Сколько же было карандашей вначале? Оба ученика сходятся, собирают карандаши в одну кучу и пересчитывают. Получается:  $5 + 9 = 14$ . Значит,  $y = 14$ .

Проверка по уравнению:

$$y - 5 = 9$$

$$14 - 5 = 9$$

$$9 = 9$$

#### 4. Противопоставление задач на нахождение суммы и разности

Обычно эти две задачи рассматриваются порознь, поскольку сами действия сложения и вычитания, с которыми соответственно связываются данные задачи, в существующей практике обучения изучаются раздельно.

При одновременном изучении взаимно обратных действий возникает возможность и необходимость противопоставления соответствующих этим действиям задач.

Учитель. На озере плавало 9 уток. Потом к ним прилетели 4 утки. Какой вопрос можно поставить к задаче?

Ученик. Сколько всего уток плавает на озере?

Учитель. Как решить задачу?

Ученик. К 9 уткам прибавить 4 утки, получится 13 уток.

Учитель. Составим теперь новую задачу. Вспомните ответ на вопрос прямой задачи. Сколько всего уток плавает на озере?

Ученик. На озере плавает 13 уток.

Учитель. В первой задаче мы говорим, что 4 утки прилетели. А как мы скажем про четырех уток во второй задаче?

Ученик. 4 утки улетели.



учитель. Кто составит вторую задачу?

Вместе с учащимися составляется новая задача:

На озере плавало 13 уток, 4 утки улетели. Сколько уток осталось на озере?

Решение: Из 13 уток вычесть 4 утки, получится 9 уток.

Ответ: На озере осталось 9 уток.

При таком видоизменении задачи учащиеся учатся пользоваться парами слов — антонимов, обозначающих действия противоположного смысла:

нашли — потеряли (... грибы),

налили — вылили (... ведер воды),

заработали — израсходовали (... рублей),

убежали — прибежали (... кролики),

улетели — прилетели (... птицы) и т.д.

Составление новой задачи учащийся выполняет самостоятельно, при этом он совершает важные логические операции по замене понятий им противоположными, по замене роли чисел, по изменению вопроса к задаче.

Впоследствии может быть дана первой и задача на вычитание, к которой учащийся составляет соответствующую задачу на сложение\*:

В бочке было 15 ведер воды. Из нее отлили 6 ведер воды. Сколько воды осталось в бочке?

Решение:

$$15 - 6 = 9 \text{ (в.)}$$

Первоклассник далее с помощью учителя составляет и решает задачу на сложение (с использованием тех же чисел, но с новым содержанием):

В бидоне было 8 л молока. В него налили еще 5 л молока. Сколько л молока стало в бидоне?

Решение:

$$8 + 5 = 13 \text{ (л).}$$

\* Данные задачи не являются взаимно обратными, так как в них используются разные понятия (налили — отлили); числовые значения в подобных задачах с глаголами противоположного смысла могут быть как совпадающими, так и несовпадающими.



## 5. Одновременное изучение задач на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц. Задачи на разностное сравнение

Связи между задачами на увеличение (уменьшение) числа на несколько единиц и задачами на разностное сравнение — двусторонние.

Не только задача на увеличение (уменьшение) на несколько единиц помогает усвоению понятия «разностное сравнение», но и, наоборот, сама эта задача не может быть глубоко усвоена в I классе, если редко использовать речевые обороты со словами: «больше на...», «меньше на...».

Эти формы мыслей в равной мере относятся и к задачам на уменьшение (увеличение) на несколько единиц, и к задачам на разностное сравнение.

Между тем наша многолетняя практика показывает возможность и целесообразность обучения всем трем видам задач при изучении первого десятка, при этом дети должны использовать два взаимосвязанных смысловых оборота:

1) 7 больше 5, значит, 5 меньше 7; 3 меньше 4, значит, 4 больше 3.

В связи с изучением сложения и вычитания в пределах 10 должны стать обычными для детей следующие вопросы и ответы на них:

2) Число 8 идет (следует) за числом 7. На сколько 8 больше 7? (8 больше 7 на 1.)

На сколько 7 меньше 8? (7 меньше 8 на 1.)

3) Как узнать, на сколько 5 больше 4? (Надо из 5 вычесть 4, получится 1; 5 больше 4 на 1.)

Как сосчитать, на сколько 4 меньше 5? (Надо из 5 вычесть 4, получится 1; 4 меньше 5 на 1.)

4) Число 6 уменьшить на 2. Сколько получится? (Из 6 вычесть 2, получится 4.)

5) Число 2 увеличить на 3. Сколько получится? (К 2 прибавить 3, получится 5.)

К 2 прибавить 3. А как иначе прочитать этот пример? (2 увеличить на 3.)

6) Из 8 вычесть 2. А как иначе прочитать этот пример? (8 уменьшить на 2.)



В методических пособиях подробно описаны практические демонстрации, на основе которых находятся разности двух значений количества, длины, массы и т.п.

Между тем на начальной стадии обучения (первый десяток) очевидными преимуществами обладают цветные бруски (или цветные полоски бумаги), разделенные на равные части. Набор таких брусков включает бруски, состоящие из 1, 2, 3, ..., 10 кубиков, причем бруски из 1, 2, 3, 4, 5 кубиков следует иметь по 2 — 3 экземпляра.

На задание «Покажи 7 кубиков!» ученик, например, показывает синий брусок, расчерченный на 7 делений.

Хорошо иметь и набор брусков длиной от 11 до 20 кубиков. Тогда на таких пособиях можно показывать деление по содержанию и кратное сравнение (II класс).

К введению понятия разностного сравнения необходимо подойти через прямую задачу на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц.

Пусть имеются синий брусок длиной 7 единиц, красный — 10 единиц, зеленый — 3 единицы. Решается сначала прямая задача.

Учитель. Сколько единиц в синем бруске?

Ученик. В синем бруске 7 единиц.

Учитель. Увеличьте число единиц на 3. Сколько получится?

Ученик. К 7 прибавить 3, получится 10 единиц. (К синему бруску в 7 единиц приставляется зеленый брусок в 3 единицы.)

Учитель. Подберите брусок длиной 10 единиц. (Ученик подкладывает снизу красный брусок длиной 10 единиц.) Какой брусок длиннее? Какой короче? На сколько единиц длиннее, на сколько короче? Как узнать?

Ученик. Красный длиннее синего на 3 единицы, а синий короче красного тоже на 3 единицы. (Из 10 вычесть 7, получится 3.)

При подготовке к изучению темы «Разностное сравнение» полезно заранее тренировать учащихся в употреблении следующих противоположных смысловых оборотов:

Учительница старше Вани.  
Книга длиннее тетради.

Ваня моложе учительницы.  
Тетрадь короче книги.



Стол выше стула.  
Костюм дороже рубаш-  
ки.  
Окно шире двери.  
Карандаш тяжелее пера.  
И т.д.

Стул ниже стола.  
Рубашка дешевле  
костюма.  
Дверь уже окна.  
Перо легче карандаша.

Учащимся предложена задача:  
Книга стоит 10 коп., а альбом на 4 коп. дороже.  
Сколько стоит альбом?

Учитель. Что дороже: книга или альбом? На сколько дороже?

За что надо отдать больше денег: за книгу или за альбом? На сколько копеек больше? Книга стоит 10 коп. Как же узнать, сколько стоит альбом?

Ученик. К 10 коп. прибавить 4 коп., получится 14 коп. Альбом стоит 14 коп.

Учитель. А теперь составим другую задачу, обратную.

Решенную задачу назовем прямой задачей. В ней говорилось, что книга стоит 10 коп. А в обратной задаче будет известна цена не книги, а цена другого предмета. Какого?

Ученик. В обратной задаче будет известна цена альбома — 14 коп.

Учитель. В прямой задаче у нас было слово «дороже». Каким же словом мы воспользуемся в обратной задаче?

Ученик. В обратной задаче мы используем слово «дешевле».

Учитель. Там мы говорили: «Альбом дороже книги на 4 коп». А теперь, что мы скажем про книгу?

Ученик. Книга дешевле альбома на 4 коп.

Учитель. В прямой задаче мы находим, сколько стоит альбом (запишем это число внутри рамки). А что мы будем искать в обратной задаче?

Ученик. Сколько стоит книга?

Одновременно с этой беседой на доске записываются 2 ряда чисел, характеризующие прямую и обратную задачи, причем искомые числа записываются в рамке.



учащиеся, ориентируясь по записанным числам, читают самостоятельно полное условие обратной задачи.

Учитель. А теперь прочитаем условие обратной задачи. Оно кратко записано справа (см. ниже). Расскажите про это число. (Указывает на число 14 коп.)

Ученик. Альбом стоит 14 коп.

Учитель указывает на следующее число.

Ученик. Книга дешевле альбома на 4 коп. Сколько стоит книга?

Затем условие задачи повторяется полностью другим учеником. Обратная задача решается так:

$$14 - 4 = 10 \text{ (коп.)}$$

Ответ: Книга стоит 10 коп.

В результате такого обсуждения условия задач и решения записываются рядом, причем можно использовать и названия решаемых задач.

### Прямая задача

Увеличение на несколько единиц.

Схема задачи:

10 коп., 4 коп., 14 коп.

Решение:

$$10 + 4 = 14 \text{ (коп.)}$$

Ответ:

Альбом стоит 14 коп.

### Обратная задача

Уменьшение на несколько единиц.

10 коп., 4 коп., 14 коп.

Решение:

$$14 - 4 = 10 \text{ (коп.)}$$

Ответ:

Книга стоит 10 коп.

На начальных этапах введения такой пары целесообразно сравнить условия решенных задач и процессы их решения с помощью вопросов, на которые следует отвечать парами фраз:

1) В условии прямой задачи было известно, что книга стоит 10 коп. А что было известно в обратной задаче? (Альбом стоит 14 коп.)

2) В прямой задаче было сказано: «Альбом дороже...» Кто дополнит? А как сказано в обратной задаче? (Книга дешевле на 4 коп.)

3) Какой вопрос был в прямой задаче? В обратной задаче? (Сколько стоит книга? Сколько стоит альбом?)



4) Как мы решили прямую задачу? обратную задачу? (Сложением:  $10 + 4 = 14$  (коп.); вычитанием:  $14 - 4 = 10$  (коп.)

5) Какой ответ к прямой задаче? К обратной задаче? (Альбом стоит 14 коп.; книга стоит 10 коп.)

6) Каким действием решили прямую задачу? Каким действием решили обратную задачу? (Прямую задачу решили сложением, а обратную — вычитанием.)

7) Почему в прямой задаче мы выполнили сложение, а в обратной — вычитание? (Потому, что в прямой задаче пользуются словом «дороже», а в обратной — «дешевле».)

Отметим, что для развития мышления учащихся имеют значение не столько процессы решения взаимно обратных задач в отдельности, сколько данный завершающий этап сравнительного анализа их, благодаря такой беседе данные две задачи как бы сливаются воедино, вписываясь в общую ткань рассуждения.

Следующая пара задач решается в другом порядке, а именно: сначала предлагается задача на уменьшение на несколько единиц:

Сестре 16 лет. Брат моложе сестры на 5 лет. Сколько лет брату?

Аналогично рассмотренному эта задача преобразуется в следующую:

Брату 11 лет. Сестра старше брата на 5 лет. Сколько лет сестре?

На доске и в тетрадях записываются решения обеих задач рядом, строка против строки:

#### Прямая задача

Схема: 16 л., 5 л.,  $\square$   
Решение  
 $16 - 5 = 11$  (л.)

#### Обратная задача

Схема:  $\square$ , 5 л., 11 л.  
Решение  
 $11 + 5 = 16$  (л.)

Впоследствии решаются и отдельные задачи (либо на увеличение, либо на уменьшение числа на несколько единиц) без преобразования в другую задачу.

Вслед за изучением задач на уменьшение и увеличение числа на несколько единиц, на основе их, изучается



задача на разностное сравнение (третья форма данной тройки задач).

Начинаем с решения прямой задачи:

Буханка хлеба стоит 13 коп., а бутылка кефира стоит на 2 коп. дороже. Сколько стоит кефир?

Решение:

$$13 + 2 = 15 \text{ (коп.)}$$

Записывается схема решенной задачи:

13 коп., на 2 коп., 15 коп.

Решается также обратная задача на уменьшение числа на несколько единиц по схеме:

□; на 2 коп.; 15 коп.

$$15 - 2 = 13 \text{ (коп.)}$$

Наконец составляется третья разновидность задач — задача на разностное сравнение.

Учитель. Составим задачу по следующей схеме:

13 коп.; на □ коп.; 15 коп.

Расскажите условие этой задачи.

Ученик. Буханка хлеба стоит 13 коп., а бутылка кефира — 15 коп. На сколько копеек бутылка кефира дороже буханки хлеба?

Учитель. К новой задаче могут быть поставлены два разных вопроса, которые решаются одним и тем же действием. Вместо слова дороже можно использовать слово дешевле. Кто сформулирует второй вопрос?

Ученик. На сколько копеек буханка хлеба дешевле бутылки кефира?

Учитель. Как же мы решили задачу?

Ученик. Из 15 коп. вычесть 13 коп., получится 2 коп.

Ответ: Бутылка кефира дороже буханки хлеба на 2 коп.

Учитель. А как иначе можно сказать?

Ученик. Буханка хлеба дешевле бутылки кефира на 2 коп.

На доске и в тетрадях появляется параллельная запись решения двух задач:



На увеличение числа  
на несколько единиц:

13 коп., на 2 коп., ☐

Решение:

$$13 + 2 = 15 \text{ (коп.)}$$

Разностное сравнение:

13 коп., на ☐ коп., 15 коп.

Решение:

$$15 - 13 = 2 \text{ (коп.)}$$

Затем первой решают задачу на разностное сравнение и преобразуют ее в две другие задачи:

Брату 16 лет, а его сестре 10 лет. На сколько лет сестра моложе брата?

Решение:

$$16 - 10 = 6 \text{ (л.)}$$

Записывается схема решенной задачи:

16 л., 10 л., на ☐.

Составляется обратная задача по схеме:

16 л., ☐ л., на 6 л.

Брату 16 лет, а сестра моложе брата на 6 лет. Сколько лет сестре?

Решение:

$$16 - 6 = 10 \text{ (л.)}$$

Вторая обратная задача имеет схему:

10 л., ☐ л., на 6 л.

Сестре 10 лет. Брат старше сестры на 6 лет. Сколько лет брату?

Решение:

$$10 + 6 = 16 \text{ (л.)}$$



**6. Задачи, в которых используется понятие «на столько-то больше», а при решении выполняется вычитание (и наоборот) (косвенные задачи)**

Рассмотрим задачу:

Коля старше Нины на 3 года. Коле 12 лет. Сколько лет Нине?

Такая подача информации требует внимательного анализа условия.

Подобные задачи редко предлагаются учащимся. Поэтому не удивительно, что не только первоклассники, но и даже учащиеся старших классов иногда допускают ошибку, решая такую задачу сложением:  $12 + 3 = 15$  (л.) вместо вычитания:  $12 - 3 = 9$  (л.)

Эта ошибка имеет следующее объяснение:

Слово «старше», имеющееся в условии задачи, становится первым членом непосредственной связи мыслей: старше → прибавить → знак «плюс».

Мы поставили целью выяснить, насколько доступны эти задачи первоклассникам.

Оказалось, что при раздельном изучении сопряженных задач на уменьшение и увеличение величины решение их связано для детей с большой трудностью и они часто допускают ошибки. Психологическая причина этого явления очевидна: как бы учащиеся хорошо ни справлялись с задачами обоих видов (представленных порознь, с разными числами и сюжетами), они не овладевают в достаточной степени умением переосмысливать связи при выборе действий для решения той или иной задачи.

В результате применения метода противопоставления дети лучше усваивают приемы различения данных задач и потом успешно справляются с их решением.

Обучение решению этих задач надо строить так:

Рассмотрим задачу: «Коле 12 лет. Нина моложе Коли на 3 года. Сколько лет Нине?»

Решение:

$$12 - 3 = 9 \text{ (л.)}$$

Записывается схема задачи:



Коле — 12 л.;

Нине —  $\square$  л.; на 3 г. моложе.

После решения задачи учитель спрашивает: «Кто был моложе?»

Ученик. Нина моложе Коли на 3 года.

Учитель. А как иначе можно сравнить возрасты Коли и Нины? Если Нина **моложе** Коли, то что можно сказать о Коле?

Ученик. Коля **старше** Нины.

Учитель. На сколько лет Коля старше Нины?

Ученик. Коля старше Нины на 3 года.

Учитель записывает схему перефразированной задачи:

Коля — 12 лет, на 3 года старше Нины.

Нина —  $\square$  л.

Учитель молча показывает указкой поочередно на этой схеме числа 12 л.; на 3 г.;  $\square$  л.

Учащиеся формулируют условие новой задачи:

Коля старше Нины на 3 года. Коле 12 лет. Сколько лет Нине?

Решение:

$$12 - 3 = 9 \text{ (л.)}$$

Решение аналогичных задач связано с переосмыслением суждений. Услышав фразу «Коля старше Нины на 3 года», для определения возраста Нины надо мысленно заменить этот оборот обращенным суждением.

Значит, Нина моложе Коли на 3 года; в результате этого появляется цепь ассоциаций:

моложе  $\rightarrow$  меньше  $\rightarrow$  вычесть.

Предлагается задача, решение которой сводится к такой цепи связи:

меньше  $\rightarrow$  больше  $\rightarrow$  прибавить.

Мама купила 5 кг капусты; капусты было куплено меньше, чем картофеля, на 3 кг. Сколько килограммов картофеля было куплено?

Учитель. Чего купили меньше и на сколько меньше?

Ученик. Капусты было куплено меньше, чем картофеля, на 3 кг.

Учитель. Чего купили больше и на сколько больше?



ученик. Картофеля купили на 3 кг больше, чем капусты.

учитель. Повторите условие задачи, чтобы использовалось слово «больше».

ученик. Мама купила 5 кг капусты, а картофеля на 3 кг больше, чем капусты. Сколько купили картофеля? Затем без труда находится решение задачи:

$$5 + 3 = 8 \text{ (кг)}$$

Эти упражнения представляют хороший материал для воспитания выдержки, внимания и догадливости на уроках математики.

Впоследствии можно предлагать учащимся более сложные задачи в два действия, в которых первое действие основано на проявлении непосредственной связи (типа: больше — увеличить, меньше — уменьшить), а второе действие основано на проявлении опосредствованной связи (типа:  $x$  больше  $y \rightarrow y$  меньше  $x \rightarrow$  уменьшить).

Таких задач можно составить четыре варианта.

Слова:

- 1) меньше и меньше
- 2) меньше и больше
- 3) больше и больше
- 4) больше и меньше

Решение:

вычитание и сложение  
вычитание и вычитание  
сложение и вычитание  
сложение и сложение

Составим, например, задачу первого варианта:

У Маши было 10 тетрадей, а у Зины на 3 тетради меньше. У Зины меньше, чем у Гали, на 5 тетрадей. Сколько было тетрадей у Гали?

Решение:

1)  $10 - 3 = 7$  (т.) — у Зины;

2)  $7 + 5 = 12$  (т.) — у Гали.

Можно также действие с перестройкой связи поставить на первом месте, тогда опять получим четыре варианта.



### Слова:

- 5) меньше и меньше
- 6) меньше и больше
- 7) больше и больше
- 8) больше и меньше

### Решение:

сложение и вычитание  
сложение и сложение  
вычитание и сложение  
вычитание и вычитание

Составим, например, задачу пятого варианта:

У Зины было 7 тетрадей. У Зины было на 3 тетради меньше, чем у Маши. У Гали на 4 тетради меньше, чем у Маши. Сколько было тетрадей у Гали?

Решение:

- 1)  $7 + 3 = 10$  (т.) — у Маши;
- 2)  $10 - 4 = 6$  (т.) — у Гали.

Наиболее развитым учащимся в качестве задачи «предельной трудности» можно предложить задачу из третьей четверки, в которой оба действия связаны с перестройкой связи.

Пусть в задаче используются слова «длиннее», «короче», а решение выполняется соответственно действиями вычитания и сложения.

Красная палочка имеет длину 40 см, она длиннее синей палочки на 10 см, а синяя короче зеленой на 13 см. Какой длины зеленая палочка?

Решение:

- 1)  $40 - 10 = 30$  (см) — длина синей палочки;
- 2)  $30 + 13 = 43$  (см) — длина зеленой палочки.

### 7. Выработка множественных связей при решении задач на сложение и вычитание

Из вышеизложенного видно, что существуют три вида задач на сложение и шесть видов на вычитание, различающихся по смыслу отраженных в них явлений.

Чтобы обобщить эти задачи и подготовить почву для их решения, т.е. для выработки кратких связей, полезно упражнять учащихся по мере изучения материала в составлении нескольких видов задач к одному примеру.

Выше мы рассматривали составление задач по уравнению: здесь речь идет о более сложных упражнениях, преследующих цель обобщения знаний, поскольку



одним и тем же действием могут быть решены различные виды задач.

Учитель записывает пример:  $15 + 3 =$ .

Далее предлагается к этому примеру составить три такие задачи, чтобы в них использовались слова:

- 1) больше на ...
- 2) ... сколько вместе?
- 3) Сколько было первоначально?

Учащиеся могут придумать следующие три задачи:

1. В сумке было 15 кг картофеля, а в мешке на 3 кг больше. Сколько килограммов картофеля было в мешке?

2. Папа принес 15 кг картофеля, а мама — 3 кг. Сколько всего картофеля принесли папа и мама вместе?

3. На обед истратили 3 кг картофеля. После обеда осталось 15 кг картофеля. Сколько килограммов картофеля было первоначально?

Известно, что слова, имеющиеся в условии задачи, несут неодинаковую логическую нагрузку; информация о выборе действия содержится в опорных словах вида «сколько всего...», «меньше на ...», «на сколько меньше...» и т.п.

Приведенные выше упражнения содействуют развитию множественных связей (ассоциаций).

Если при решении задачи проявляется связь вида «опорное слово → действие», то при выполнении данного упражнения вырабатываются обратные связи вида «действие → опорное слово» (детям можно говорить «главное слово»).

В рассматриваемом случае множественная связь имеет следующее строение:

сложение	→ «увеличить на...»
	→ «сколько вместе...»
	→ «сколько всего...»
	→ «сколько было первоначально...»

Упрочение таких связей знаменует подъем на качественно новую ступень в развитии мышления учащихся: так, если основная система изучения простых задач на действии первой ступени строилась на базе понятий «сумма», «уменьшаемое» и т.д., то в данном случае



осуществляется другая перегруппировка задач, причем наиболее выпукло выявляется роль информативности слов: «на», «вместе» и т.п.

Для учащихся проще составлять задачи к примеру с отвлеченными числами.

Пусть надо составить четыре задачи на вычитание ( $60 - 20 =$ ), т.е. требуется сформулировать следующие связи:

вычитание	→ «сколько осталось...»
	→ «сколько истратил...»
	→ «меньше на...»
	→ «на сколько...»

Учащиеся могут составить и решить соответственно следующие задачи:

1. У мальчика было 60 коп. Он купил конфет на 20 коп. Сколько денег у него осталось?

2. У рабочего было 60 руб. Он истратил несколько рублей на покупку часов, после чего у него осталось 20 руб. Сколько стоили часы?

3. Отец заработал 60 руб. Сын заработал на 20 руб. меньше, чем отец. Сколько денег заработал сын?

4. Красная лента длиной 60 см, а синяя — 20 см. На сколько сантиметров красная лента длиннее синей?

## 8. Простая и составная задача

Для первоклассника переход от задач в одно действие к составным задачам в два действия сопряжен со значительными трудностями.

Моделью рассуждений, необходимых для решения составных задач, служит решение соответствующих составных примеров.

Чтобы добиться четкого представления детьми различия между примерами простыми и составными, надо показать превращение простого примера в составной пример.

В этих целях удобно записывать решения составных примеров двумя способами.



## I способ:

решение отдельными действиями:

$$1) \begin{aligned} 5 + 2 &= 7 \\ 7 - 1 &= 6 \end{aligned}$$

## II способ:

Решение в одну строчку:

$$5 + \overset{7}{2} - 1 = 6$$

Над вторым компонентом равенства (числом 2) надписываем результат промежуточного действия, а именно число 7.

Для уяснения сущности превращения двух примеров с общим средним членом в составной пример полезны упражнения по восстановлению пропущенных чисел:

$$a) \begin{aligned} \square - 5 &= 3 \\ 3 + 1 &= 4 \end{aligned}$$

→

$$\square - \overset{3}{5} + 1 = 4$$

$$b) \begin{aligned} 6 - \square &= 4 \\ 4 + 3 &= 7 \end{aligned}$$

→

$$6 - \overset{4}{\square} + 3 = 7$$

$$в) \begin{aligned} 6 + 2 &= 8 \\ 8 - \square &= 7 \end{aligned}$$

→

$$6 + 2 - \overset{8}{\square} = 7$$

Затем можно предлагать составные примеры в одну строчку; при этом как элемент записи используется и результат промежуточного действия, надписываемый над примером.

Одновременно с решением составных примеров рассматриваются составные задачи.

Сначала задачи составляются через использование пар понятий:

принесли — унесли;

пришли — ушли;

налили — отлили и т.п.

Пусть нами составлен сложный пример:

$$6 + 3 - \overset{9}{2} = 7$$



К данному составному примеру тут же составляем задачу:

В бидоне было 6 л молока; в него налили (+) 3 л, а затем отлили (—) 2 л. Сколько литров молока осталось в бидоне?

Если подобная задача предлагается для самостоятельного решения, то сначала решение можно выполнить двумя способами: развернуто (отдельными действиями) и свернуто (в одну строчку):

I способ:

$$1) 6 + 3 = 9 \text{ (л)}$$

$$2) 9 - 2 = 7 \text{ (л)}$$

II способ:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 6 + 3 - 2 = 7 \text{ (л)} \end{array}$$

В составных задачах надо использовать и пары понятий на разностное сравнение величин: (больше — меньше, старше — моложе, тяжелее — легче, длиннее — короче и т.п.).

Мише 7 лет, а его сестра Нина на 3 года старше. Сколько лет Пете, если он на 8 лет моложе Нины?

Решение отдельными действиями:

$$1) 7 + 3 = 10 \text{ (л.)}$$

$$2) 10 - 8 = 2$$

(года Пете)

Решение в одну строчку:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 7 + 3 - 8 = 2 \\ \text{(года Пете)} \end{array}$$

### 9. Обратная задача к задачам в два действия

Полезным средством для развития логического мышления детей является составление и решение обратных задач. Рассмотрим задачу:

В автобусе ехало 14 человек. На остановке из него вышли 4 человека и 3 человека вошли. Сколько человек поехало дальше?

Решение:



I способ записи: II способ записи:

1)  $14 - 4 = 10$  (ч.)

2)  $10 + 3 = 13$  (ч.)

$14 - 4 + 3 = 13$  (ч.)

Запишем схему решений задачи в такой последовательности чисел: 14, 4, 3, **13**.

Учитель. В прямой задаче были даны (известны) три числа (14, 4, 3). Ответом к прямой задаче является число 13. (Оно записано внутри квадратика.)

А теперь составим обратную задачу. Для этого за неизвестное возьмем любое из трех известных чисел условия прямой задачи.

Пусть неизвестным будет первое число (14).

Схему обратной задачи подпишем под схемой прямой задачи, число под числом\*.

Получаем две строки:

Прямая задача: 14, 4, 3, **13**.

Обратная задача: **14**, 4, 3, 13.

Учитель. Теперь научимся по записанной схеме составлять условие обратной задачи.

Я буду показывать последовательно на числа второго ряда справа налево, а вы должны рассказать про каждое число так, чтобы получилась обратная задача.

Расскажите про число 13.

Ученик. В автобусе поехало дальше 13 человек.

Учитель. Что означает число 3? Скажи.

Ученик. На остановке вошли в автобус 3 человека.

Учитель. Что означает число 4?

Ученик. Вышли из автобуса 4 человека.

Учитель. По этому числу надо сформулировать вопрос обратной задачи.

Ученик. Сколько человек ехало в автобусе?

\* В других случаях схему обратной задачи можно записать рядом со схемой прямой задачи.



Учитель. Условие вопроса сформулировано верно, но надо сформулировать всю задачу, для этого используйте числа ряда слева направо.

Ученик. В автобусе ехало несколько человек. На остановке вышли из него 4 человека и 3 человека вошли. Дальше поехало 13 человек. Сколько человек ехало в автобусе до остановки?

Учитель. На остановке вошли 3 человека, и после этого стало 13 человек. А до их входа было пассажиров меньше, чем 13, или больше?

Сколько же было пассажиров сразу после того, как вышли 4 человека, до входа трех человек?

Ученик. До их входа было 10 человек ( $13 - 3 = 10$ ).

Учитель. Сколько же стало пассажиров после их входа?

Ученик. После их входа стало 13 человек ( $10 + 3 = 13$ ).

Учитель. Но из автобуса вышли 4 человека. А до их выхода сколько же было пассажиров? Сколько человек подъехало к остановке?

Ученик. Подъехало к остановке 14 человек.

$$10 + 4 = 14 \text{ (чел.)}$$

Решения прямой и обратной задач удобно записать рядом.

14, 4, 3, □  
Прямая задача

- 1) Сколько человек осталось в автобусе?  
 $14 - 4 = 10 \text{ (чел.)}$
- 2) Сколько человек стало в автобусе?  
 $10 + 3 = 13 \text{ (чел.)}$

□, 4, 3, 13  
Обратная задача

- 1)  $13 - 3 = 10 \text{ (чел.)}$
- 2)  $10 + 4 = 14 \text{ (чел.)}$

Решение прямой задачи можно оформить с вопросами. Решение же обратной задачи нет смысла оформлять с вопросами, так как соответствующие вопросы хотя и понятны логически, но сложны для словесного оформления детьми.

Решения обеих задач можно записать в виде формул (в строчку):



$$14 - 4 = 10 \text{ (чел.)}$$

$$13 - 3 = 10 \text{ (чел.)}$$

Иногда можно оформлять решения взаимно обратных задач на доске в одной графе-схеме (где сплошные стрелки обозначают связь чисел в прямой задаче, а пунктирные — связь тех же чисел в обратной задаче (рис. 19).

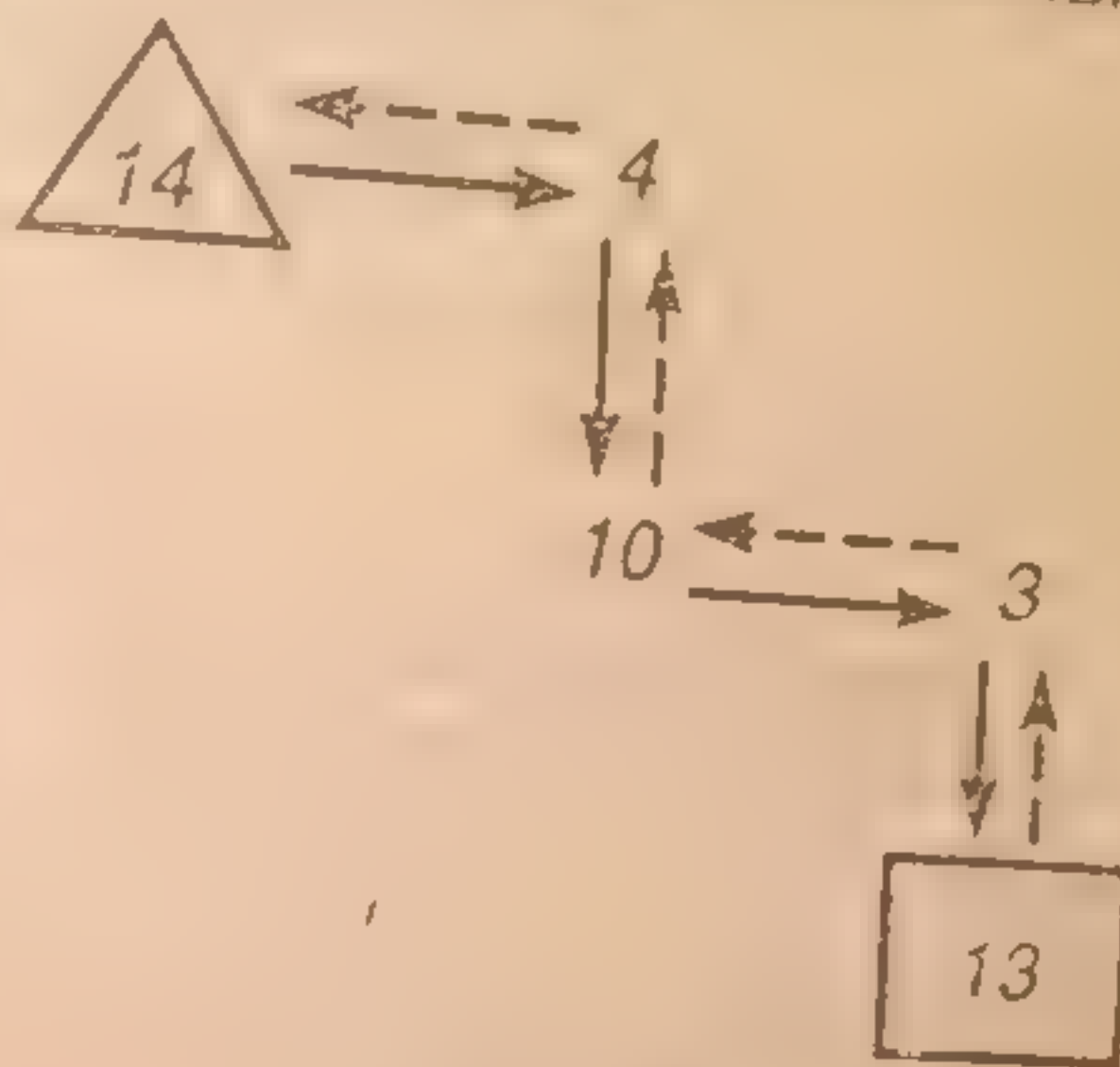


Рис. 19.

Одновременное изучение трех видов задач на уменьшение и увеличение числа на несколько единиц и разностное сравнение позволяет также составлять и решать обратные задачи к задачам в два действия.

Рассмотрим задачу: «На нижней полке 20 книг, на средней — на 7 книг больше, чем на нижней, а на верхней — на 5 больше, чем на средней. Сколько книг на верхней полке?»

I на 5 больше	?
II на 7 больше	
III .	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">20 книг</span>

Условие задачи наглядно изображается схематически так: стрелкой показано направление сравнения; число книг записывается правее вертикальной черты, а результаты разностного сравнения левее этой черты; иначе говоря, эта черта, простейший элемент схемы, несет определенную долю информации, облегчая процесс решения задачи.

Решение:

$$1) 20 + 7 = 27 \text{ (кн.)};$$

$$2) 27 + 5 = 32 \text{ (кн.)}.$$

Схема решенной задачи:

20 кн., 7 кн., 5 кн., 32 кн.

Затем составляется схема обратной задачи:

□, 7 кн., 5 кн., 32 кн.



Соответствующее наглядное изображение задачи таково:

I	32 книги
II на 5 меньше	
III на 7 меньше	?

Учащиеся охотно выполняют самостоятельно логическую перестройку условия первой задачи и формулируют условие обратной задачи.

На верхней полке было 32 книги, на средней — на 5 книг меньше, чем на верхней, на нижней — на 7 книг меньше, чем на средней. Сколько книг было на нижней полке?

Решение:

1)  $32 - 5 = 27$  (кн.);

2)  $27 - 7 = 20$  (кн.).



# Глава V

## УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ В ПРЕДЕЛАХ 100

### 1. О системе простых задач, рассматриваемых при изучении табличного умножения и деления

Мы в своей практике осуществили изучение умножения и деления в следующей последовательности циклов задач:

1, а, б) Умножение при постоянном множимом и деление по содержанию.

1, в) Деление на равные части.

2, а, б) Уменьшение и увеличение числа в несколько раз.

2, в) Кратное сравнение.

3, а, б) Нахождение одной части числа и числа по величине одной его части.

3, в) Решение задачи: «Какую часть составляет одно число от другого?»

4, а, б) Задачи на прямое и обратное приведение к единице (совместно).

Расположения задач по теме «Умножение и деление» представим схематически:

I	а) умножение (повторение равных слагаемых, прямая задача)	б) деление по содержанию	в) деление на равные части
	II а) увеличение числа в несколько раз (прямая задача)	в) кратное сравнение	б) уменьшение числа в несколько раз



III б) нахождение  
числа по части

в) какую часть  
составляет  
одно число от  
другого

а) нахождение  
части числа  
(прямая задача)

В этой системе наиболее простыми исходными задачами (условно названными нами «прямыми», они помечены буквой а) являются задачи на умножение (повторение равных слагаемых), на увеличение числа в несколько раз и на нахождение части числа.

Рассмотрим какую-либо тройку задач, например на умножение, деление по содержанию и деление на равные части.

Пусть для показа процесса умножения использовалось повторение слагаемого — именованного числа «4 тетради»: «3 ученика принесли по 4 тетради. Сколько всего тетрадей они принесли?»

При одновременном изучении умножения и деления по содержанию, в сущности, используется одна демонстрация, имеющая два «проявления»: если 3 ученика принесли по 4 тетради (при умножении), то тут же осуществляется демонстрация для обратной задачи — раздача учителем 12 тетрадей, по 4 тетради тем же 3 ученикам.

Учащийся при решении последней задачи заранее «теоретически» знает, что должно получиться 3 «уч.» (речь идет об одновременном изучении двух первых задач), а затем убеждается в этом на практике (в результате фактической раздачи), очевидно, при этой методике центр тяжести переносится удачно на логику явлений, на рассуждения.

В самом деле, при решении прямой задачи получение ответа основывается прежде всего на практических операциях (при умножении  $4 \text{ т.} \cdot 3 =$  ответ «12 т.» заранее неизвестен, он находится после демонстрации сложения трех равных слагаемых  $4 + 4 + 4 = 12 \text{ (т.)}$ ; стало быть, перед решением обратной задачи «следы» от всех трех чисел (4 т., 3, 12 т.) уже оставлены в памяти учащихся.

Роль логического элемента при введении задач еще больше возрастает на втором этапе, когда рассматривается третья задача (в данном случае задача на деле-



ние на равные части). Сказанное отнюдь не означает умаления роли демонстраций, наглядного показа при изучении обратных задач.

## 2. Задачи на умножение и деление по содержанию и деление на равные части

Одновременное изучение умножения и деления по содержанию.

На двух-трех уроках (не больше!), посвященных умножению, выясняется смысл понятия умножения как свернутого сложения равных слагаемых (о делении на этих уроках пока не говорится). Этого времени достаточно для изучения таблицы умножения 2.

Обычно учащимся показывается запись по замене сложения умножением:  $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ ;  $2 \cdot \square = 8$ . Здесь связь между сложением и умножением идет в направлении «сложение  $\rightarrow$  умножение». Уместно тут же предложить учащимся упражнение, рассчитанное на появление противоположной связи вида: «умножение  $\rightarrow$  сложение».

$$\square + \square + \square + \square = 8; \quad 2 \cdot 4 = 8$$

Здесь учащийся должен уметь повторить слагаемым число 2 столько раз, сколько показывает множитель в примере ( $2 \cdot 4 = 8$ ).

Сочетание обоих видов упражнений есть одно из важных условий, обеспечивающих сознательное усвоение понятия «умножение», означающего свернутое сложение.

На третьем уроке (или четвертом, в зависимости от класса) в каждом из известных случаев умножения приводится соответствующий случай деления. В дальнейшем умножение и деление по содержанию выгодно рассматривать только совместно на одних и тех же уроках.

При введении понятия деления необходимо вспомнить соответствующие случаи умножения, чтобы, оттолкнувшись от них, создать понятие о новом действии, обратном умножению.



Стало быть, понятие «умножение» приобретает богатое содержание: оно не только результат сложения равных слагаемых («обобщение сложения»), но и основа, исходный элемент деления, которое в свою очередь представляет свернутое вычитание «равных вычитаемых».

Смысл умножения постигается не столько при самом умножении, сколько при постоянных переходах между умножением и делением, так как деление есть завуалированное, «измененное», обращенное умножение.

Это и объясняет, почему выгодно изучать одновременно умножение и деление, как табличное и внетабличное, как устное, так и письменное.

Рассмотрим примеры:

по 2 • 3 (по 2 взять 3 раза) и

6 : по 2 (6 разделить по 2).

Вначале несколько учеников берут со стола по 2 кружочка и отходят в сторону (5 — 6 человек).

Учитель объявляет, что эти ученики будут принимать участие в составлении задач (решает задачи весь класс).

Когда решается прямая задача на умножение, ребята подходят к учителю (к наборному полотну) и отдают (вкладывают) по 2 кружочка.

Учитель сопровождает эти действия фразами, составленными вместе с учащимися:

«по 2 взяли один раз, получили 2;

по 2 взяли два раза, получили 4;

по 2 взяли три раза, получили 6» и т.д.

Ученики, отдавшие кружочки, становятся рядом с учителем.

Произносится заключительная фраза: «по 2 взять 3 раза, получится 6» — и на доске записывается пример:  $2 \cdot 3 = 6$ .

Сразу же решается обратная задача. Учитель говорит: если в прямой задаче на умножение мы собирали кружочки, то в обратной задаче будем не собирать, а раздавать кружочки.

По сколько кружочков нам надо раздать? (По два.)

Учитель отделяет от 6 кружочков 2 кружочка и отдает их одному ученику, который отходит в угол класса.



учитель говорит: «Два кружочка мы отдали».

От оставшихся кружочков отделяют еще два кружочка и отдают второму ученику.

Наконец, последние два кружочка получает третий ученик.

Учитель. По два кружочка получили три ученика. Сколько мы всего раздали кружочков? (Записывает число 6.)

Как мы разделили эти кружочки? По сколько мы делили? По сколько мы раздавали? (Записывается:  $6 : \text{по } 2 = .$ )

Сколько учеников получили кружочки? (Три.) (Дописывает:  $6 \text{ по } 2 = 3$  (раза)).

На доске появились рядом две записи:

Умножение  
 $\text{по } 2 \cdot 3 = 6$

Деление  
 $6 : \text{по } 2 = 3$

Оба примера прочитываются снова:

по 2 взять 3 раза, получится 6;

6 разделить по 2, получится 3 раза.

Или: по 2 кружочка взяли 3 раза, получится 6 кружочков.

6 кружочков разделить по 2 кружочка — получатся три.

В заключительной беседе учащиеся снова сравнивают процессы решения двух задач. В задаче на умножение мы говорим «взять столько-то раз» и пишем знак умножения (точку). В задаче на деление мы говорим «разделить по столько-то» и пишем знак деления (двое-точие).

Затем учащиеся показывают ответы прямой и обратной задачи и делают вывод: в прямой задаче мы подсчитали (нашли, получили), сколько всего кружочков; в обратной задаче мы подсчитали (нашли, получили), скольким ученикам достались кружочки.

Первые уроки по одновременному изучению умножения и деления должны быть посвящены педантичной отработке самих логических операций, подкреплению более развернутой практической деятельностью по собиранию и раздаче различных предметов



(кубики, грибы, палочки и т.п.), но последовательность развернутых действий должна оставаться одной и той же (как это было выше).

Результатом такой работы и будут таблицы умножения и деления:

по 2 · 2 = 4	4 : по 2 = 2
по 2 · 3 = 6	6 : по 2 = 3
по 2 · 4 = 8	8 : по 2 = 4
по 2 · 5 = 10	10 : по 2 = 5 и т.д.

Таким образом, таблица умножения строится по постоянному множимому, а таблица деления — по постоянному делителю.

Мы выше отмечали полезность упражнений по переходу от умножения к сложению.

$$\text{по } 3 \cdot 6 = 18 \quad 3 + \square + \square + \dots = 18$$

Полезно также предложить учащимся в паре с данной задачей структурно-противоположное упражнение по переходу от деления к вычитанию.

Рассмотрим задачу:

18 тетрадей раздали учащимся — по 3 тетради каждому. Сколько учащихся получили тетради?

$$18 \text{ т.} : \text{по } 3 = 6 \text{ (уч.)}$$

Учитель. Можно ли решить задачу не делением, а последовательным вычитанием? И как?

Сначала мы дали бы ученику 3 тетради. Было 18, из 18 вычесть 3, останется 15 ( $18 - 3 = 15$ ).

От оставшихся 15 тетрадей снова отделим 3 тетради и отдадим их второму ученику, останутся 12 тетрадей и т.д., пока не раздадим все тетради.

Значит, деление по 3 можно заменить вычитанием нескольких троек.

Учитель пишет:

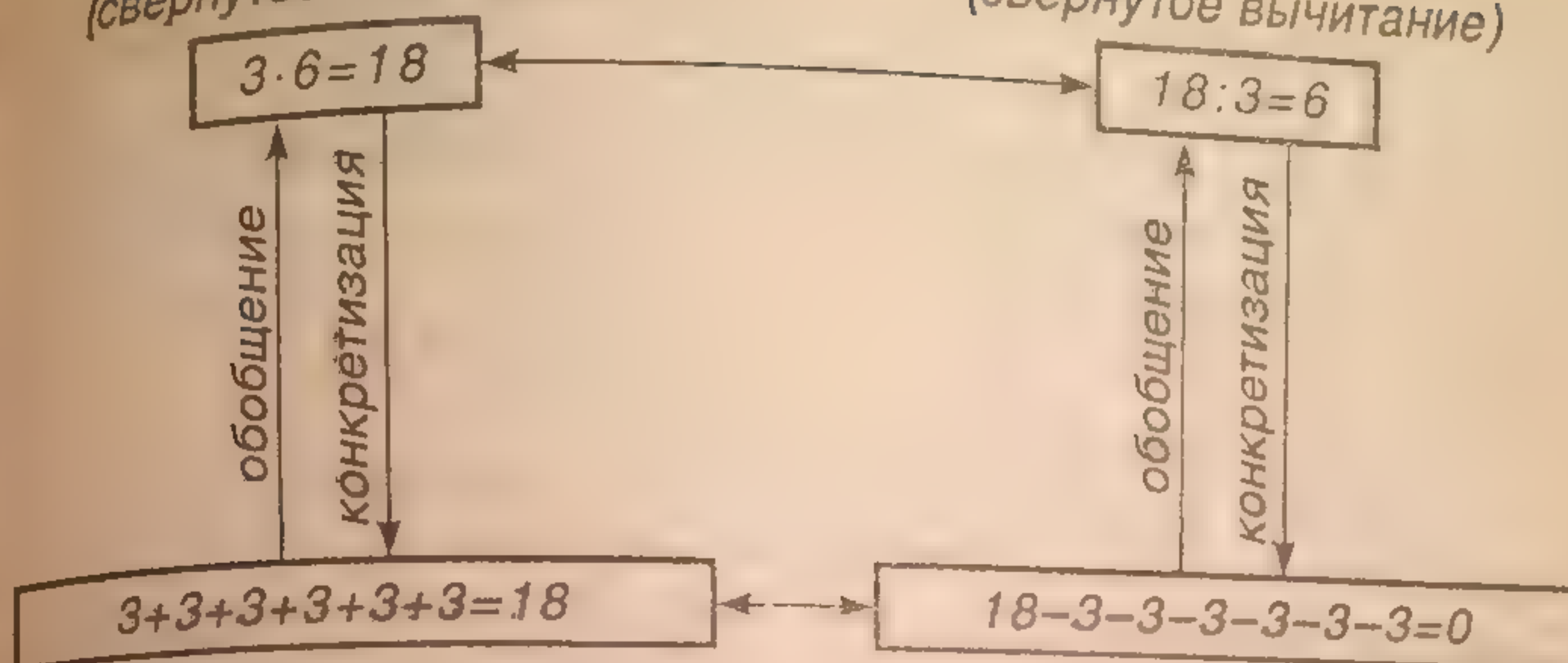
$$18 : 3 = 6 \text{ — } 18 - 3 - \square - \square - \dots = 0$$

Сколько раз надо вычесть по 3 из 18, чтобы ничего не осталось? (6 раз.)



Умножение  
(свернутое сложение)

Деление  
(свернутое вычитание)



Впоследствии такие задания можно усложнить, не указывая равных друг другу слагаемых и вычитаемых:

$$4 \cdot 5 = 20$$

$$\square + \square + \square + \square + \square = 20$$

$$20 : 4 = 5$$

$$20 - \square - \square - \square - \square - \square = 0$$

В повторительных упражнениях полезно предлагать задания такого вида:  $14 : 2 =$

Учитель спрашивает: «При выполнении этого задания предметы надо собирать или раздавать? Почему вы так думаете? По сколько надо раздавать? Составьте задачу на деление».

Учащиеся составляют задачу: «14 тетрадей раздали ученикам — по 2 тетради каждому. Сколько учеников получили тетради?»

Далее учитель предлагает составить сначала обратный пример:  $2 \cdot 7 = 14$  — и соответственно к нему обратную задачу: «7 пионеров принесли по 2 ведра воды. Сколько ведер воды принесли они вместе?»

### Изучение деления на равные части

После того как изучены или повторены совместно умножение двух и деление по 2, на одном из уроков вводится понятие «деление на равные части».

Пусть требуется изучить деление по 2.  
Четыре ученика принесли по 2 тетради. Сколько всего тетрадей принесли?

По 2 взять 4 раза, получится 8. (Появляется запись:  $по 2 \cdot 4 = 8$ .)



Кто составит обратную задачу?

При умножении мы собирали тетради. Что будем делать при делении по два?

8 тетрадей раздали по 2 тетради, получится 4

Получили четыре ученика.

Появляется запись:

по 2 т.  $\cdot$  4 = 8 т.    8 т. : по 2 т. = 4 (учен.)\*

Теперь составим третью задачу:

8 тетрадей надо раздать поровну четверем ученикам. По сколько тетрадей достанется каждому?

Вначале деление на равные части также следует демонстрировать на моделях.

Учитель отсчитывает 8 тетрадей.

Скольким ученикам надо раздать 8 тетрадей? (Четырем.)

К доске вызываются четыре ученика. Сначала раздают по 1 тетради каждому ученику. Оставшиеся 4 тетради снова раздают по 1 тетради каждому. Все тетради розданы.

По сколько тетрадей получил каждый ученик? (По 2 тетради.)

На доске записывается три примера:

по 2 т.  $\cdot$  4 = 8 т.

8 т. : по 2 т. = 4 (чел.)

8 т. : по 4 = по 2 т.

В некоторых случаях специально противопоставляются два вида деления: деление по содержанию и деление на равные части.

10 карандашей раздали ученикам, по 2 карандаша каждому.

Сколько учеников получили карандаши?

10 кар. : по 2 кар. = 5 (учен.)

Кто придумает задачу на другой вид деления, чтобы при решении ее сразу надо вызывать 5 человек?

Как называется такое деление?

(К доске вызывается 5 учеников, им раздаются отсчитанные 10 карандашей, сначала по одному карандашу, затем еще по одному.)

\* На первых порах надо пользоваться подробной записью чисел с наименованиями.



Записываются три примера:

$$\text{по } 2 \cdot 5 = 10 \quad 10 : \text{по } 2 = 5 \quad 10 : \text{на } 5 = \text{по } 2$$

В результате такой работы появляются три таблицы. одна — на умножение, две другие — на деление по содержанию и на равные части.

С помощью учителя записываются несколько первых строчек из этих таблиц:

$$\text{по } 2 \cdot 2 = 4$$

$$4 : \text{по } 2 = 2$$

$$4 : \text{на } 2 = \text{по } 2$$

$$\text{по } 2 \cdot 3 = 6$$

$$6 : \text{по } 2 = 3$$

$$6 : \text{на } 3 = \text{по } 2$$

$$\text{по } 2 \cdot 4 = 8$$

$$8 : \text{по } 2 = 4$$

$$8 : \text{на } 4 = \text{по } 2$$

Далее учитель формулирует задачу: «10 яблок раздали по 2 яблока каждому ученику. Сколько учеников получили яблоки?»

Кто составит обратную задачу на умножение?

5 учеников принесли по 2 яблока. Сколько всего яблок они принесли? (По 2 взять 5 раз, получится 10; принесли 10 яблок.)

Соответствующий пример записывается в левом столбике.

Кто составит обратную задачу на деление на равные части?

10 яблок раздать поровну 5 ученикам, получится по 2. (Или: 10 яблок разделить на 5 равных частей, получится по 2.)

Соответствующий пример записываем в третьем столбце.

Учитель предлагает задачу: «12 карандашей раздали 6 ученикам. Какое это деление: по содержанию или на равные части? По сколько достанется каждому?»

Пример ( $12 : \text{на } 6 = \text{по } 2$ ) записывается в третьем столбце. Иначе говоря, впоследствии в качестве отправного момента к рассмотрению деления на равные части может выступать не только умножение, а иногда и деление по содержанию.

На уроках по изучению умножения и деления широко используется метод решения взаимно обратных задач.



где дети используют названия «прямая и обратная задача».

Рассмотрим задачу:

Четыре пионерских звена посадили по 3 грядки моркови. Сколько грядок моркови посажено пионерами?

Решение:

$$3 \text{ гр.} \cdot 4 = 12 \text{ гр.}$$

После решения задачи учитель анализирует ее вместе с учащимися.

Выясняется, что в условии задачи были даны два числа (по 3 грядки, 4 звена); при решении найдено третье число — 12 грядок.

Появляется запись:

по 3 гр., 4 звена, 12 гр.

Затем учитель рядом с этой записью (справа) пишет схему обратной задачи, разъясняя: «Если в прямой задаче число 12 грядок не было дано, но его нашли при решении, то в обратной задаче сделаем его известным, а число 4 звена сделаем неизвестным».

На доске появляются записи:

Прямая задача  
по 3 гр., 4 звена, 12 гр.

Решение:

$$\text{по } 3 \text{ гр.} \cdot 4 = 12 \text{ гр.}$$

Обратная задача  
по 3 гр.,  $\square$ , 12 гр.

Решение:

.....

Учитель, указывая поочередно на числа «12 гр.», «по 3 гр.», добивается формулировки новой задачи.

12 грядок моркови посажено несколькими пионерскими звеньями. Каждое звено посадило по 3 грядки.

А кто сформулирует вопрос задачи?

(Учитель указывает на пустой квадрат схемы.)

Сколько пионерских звеньев сажали морковь?

\* Прямой задачей мы называем задачу, которая решается первой; задача, полученная ее преобразованием при сохранении сюжета и чисел и взаимозамены искомого и известного чисел, называется обратной по отношению к прямой.



Кто повторит задачу полностью? Каким действием мы решим задачу?

Наконец, в правой половине доски (страницы) записывается решение задачи:

Решение:

$$12 \text{ гр.} : \text{по } 3 \text{ гр.} = 4 \text{ (звена)}$$

Вместо заголовка «прямая задача» и «обратная задача» можно иногда писать соответственно «умножение» и «деление по содержанию».

Также по схеме составляется вторая обратная задача:

$$\square, 4 \text{ звена, } 12 \text{ гр.}$$

12 грядок моркови посажено поровну 4 пионерскими звеньями. По сколько грядок посажено каждым звеном?

Решение:

$$12 \text{ гр.} : 4 = \text{по } 3 \text{ гр.}$$

Иногда следует записывать задачи рядом на оба вида деления.

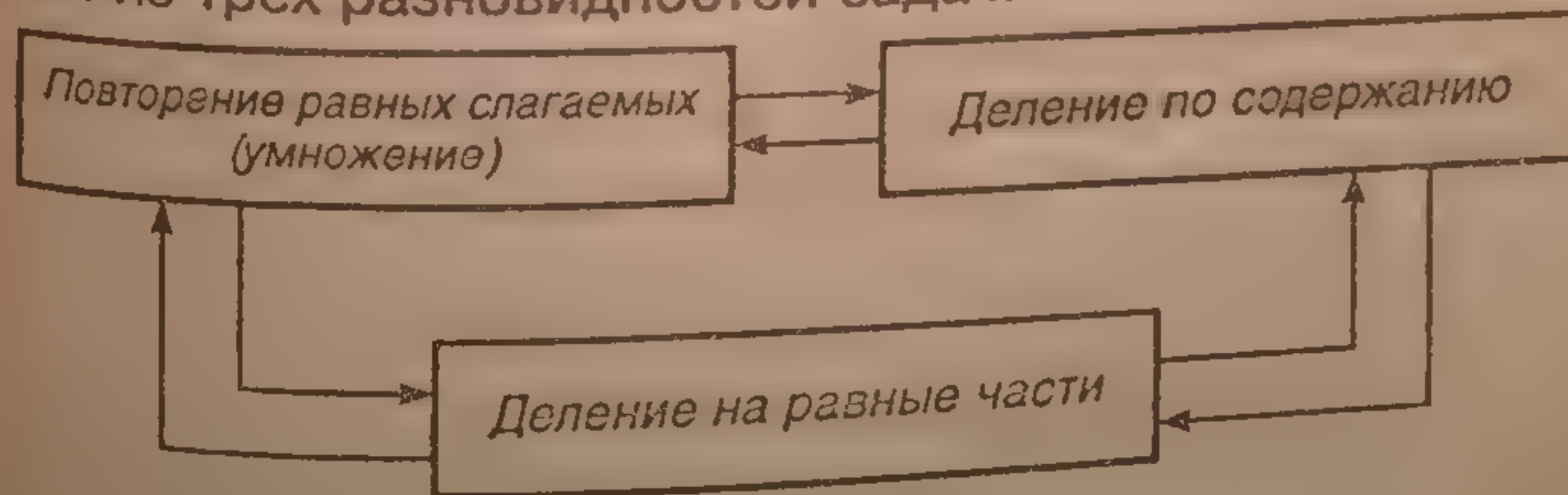
Деление по содержанию:

$$12 \text{ гр.} : \text{по } 3 \text{ гр.} = 4 \text{ (звена)}$$

Деление на равные части:

$$12 \text{ гр.} : 4 = 3 \text{ (гр.)}$$

В результате применения описанной методики в сознании школьника возникает циклическая система связей из трех разновидностей задач.





### 3. Изучение переместительного закона умножения

Выше мы рассмотрели одновременное составление двух таблиц умножения и деления по содержанию.

При этом сопоставляются пары примеров:

$$\text{по } 2 \cdot 6 = 12 \text{ и } 12 : \text{по } 2 = 6$$

$$\text{по } 2 \cdot 7 = 14 \text{ и } 14 : \text{по } 2 = 7$$

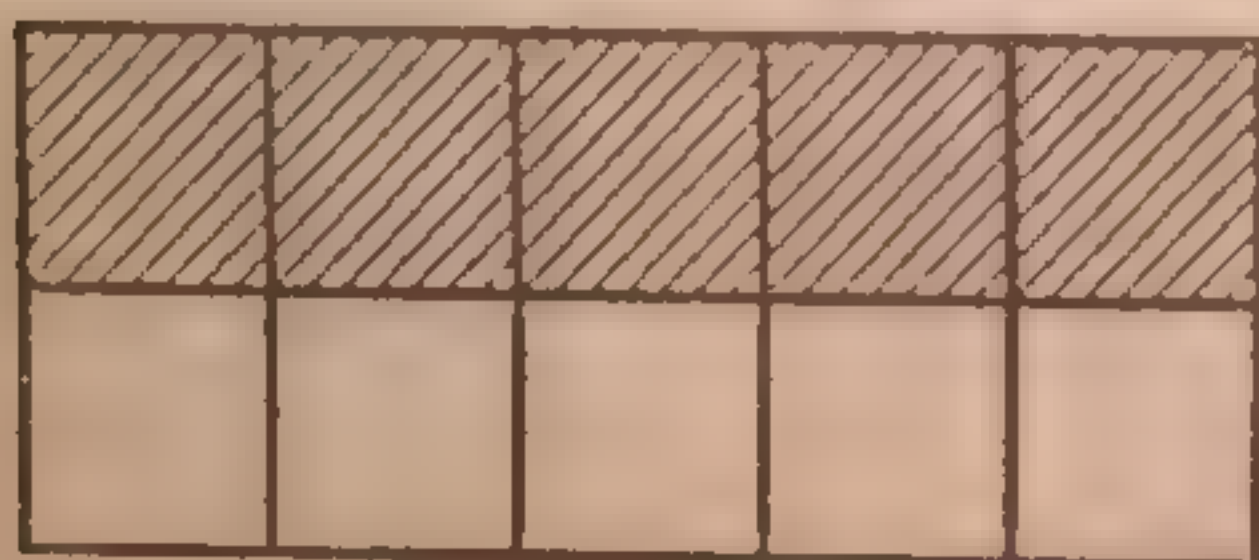
$$\text{по } 2 \cdot 8 = 16 \text{ и } 16 : \text{по } 2 = 8^*$$

Как и в случае изучения сложения, так и в случае изучения умножения необходимо с самых первых шагов работать над переместительным законом.

Применяя переместительный закон сложения, выполняем следующее рассуждение:

Чтобы к 2 прибавить 9, надо к 9 прибавить 2. Почему? ( $2 + 9 = 9 + 2$ .)

При прибавлении большего числа к меньшему удобно меньшее число прибавлять к большему.



$5+5=10$	$5 \cdot 2=10$
$2+2+2+2+2=10$	$2 \cdot 5=10$

Рис. 20.

Для объяснения переместительного закона умножения на доске начертим 2 ряда клеток, по 5 клеток в каждом ряду (рис. 20).

Дается понятие рядов и столбиков.

Подсчитайте, сколько рядов клеток начерчено на доске. Дети дважды проводят рукой в воздухе направо и говорят:

— 2 ряда клеток.

Сколько клеток в одном ряду? Считайте с места.

Показывая пальцем, дети подсчитывают количество клеток в одном ряду (нижний ряд учитель закрывает).

— В одном ряду пять клеток.

— Сколько же клеток во втором ряду?

\* Отметим, что аналогичная система операций была осуществлена при изучении сложения и вычитания в I классе, где также выгодно одновременно рассматривать пары примеров:

$$9 + 2 = 11 \text{ и } 11 - 2 = 9 \text{ и т.п.}$$

$$9 + 3 = 12 \text{ и } 12 - 3 = 9 \text{ и т.п.}$$



— Во втором ряду тоже пять клеток — столько же.  
 — Говорят так: в 2 рядах было по ... (сколько) клеток?  
 — В двух рядах было по 5 клеток.  
 — Сколько же клеток всего в двух рядах?  
 — Как подсчитать? Как записать это? Решите задачу сложением и умножением.  
 Появляется запись:

$$5 + 5 = 10 \quad \text{по } 5 \cdot 2 = 10$$

— А теперь решим задачу по-другому. Мы считали клетки по рядам, но можно подсчитать их и по столбцам. Сколько столбцов нарисовано? Подсчитайте!

Учитель показывает столбцы, а дети считают, двигая рукой сверху вниз: один столбик, два столбика... пять столбиков!

— По сколько клеток в каждом столбике? Сколько всего клеток? Подсчитайте.

Записывается два примера:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 \quad \text{по } 2 \cdot 5 = 10$$

Переместительный закон записывается сначала на числах, а потом на буквах:

$$5 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Для лучшего усвоения переместительного закона умножения необходимо проверять его подробным сложением:

$5 \cdot 2 =$	$2 \cdot 5 =$
$5 + 5 = 10$	$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$

Дети постепенно приучаются к мысли, что проще умножить большее число на меньшее, чем меньшее на большее\*.

\* Уместно сравнить с аналогичным случаем сложения чисел: проще прибавить к большему числу меньшее, чем к меньшему большее:  
 $2 + 5 = 5 + 2 = 7$   
 $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10$



Однако время от времени детей следует возвращать к исходным связям, на основе которых подтверждается переместительный закон умножения, т.е. в обоих случаях получать ответ развернутыми операциями.

Для закрепления данного материала полезно решать деформированные примеры:

$$\begin{array}{ll} 5 \cdot \square = 3 \cdot \square & x \cdot \square = y \cdot \square \\ \square \cdot 4 = 3 \cdot \square & \square \cdot 2 = a \cdot \square \\ 6 \cdot \square = \square \cdot 3 & \square \cdot \square = 3 \cdot b \text{ и т.д.} \end{array}$$

Для этой цели также полезны примеры, выполняемые сложением.

Сколько взять семерок и сколько пятерок, чтобы их суммы были равными?

$$\begin{array}{c} 7 + 7 + \square + \square + \square = 5 + 5 + \square + \square + \square + \square \\ \text{семерки} \qquad \qquad \qquad \text{пятерки} \end{array}$$

Решение:

$$7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$$

Здесь слева следует написать столько семерок, а справа столько пятерок, чтобы получилась в обеих частях одна и та же сумма.

Полезно обратить внимание учащихся на то, что переместительный закон одинаков как для сложения, так и для умножения.

$$\begin{array}{ll} 2 + 4 = 4 + 2 & 2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 \\ a + b = b + a & a \cdot b = b \cdot a \end{array}$$

Так готовится почва для обобщения в последующем понятия о коммутативных операциях в математике.

Если Иван — сосед Петра, то Петр — сосед Ивана.

Если Нина учится с Зиной, то Зина учится вместе с Ниной и т.п.

Уместно тут же привести пример некоммутативных операций как в математике, так и в логике.

Например, при делении или вычитании нельзя переставлять числа:



$$8 - 2 = 6$$

2 — 8 не имеет смысла.

Нельзя вычитать из меньшего числа большее!

$$8 : 2 = 4$$

2 : 8 = не имеет смысла.

Нельзя делить меньшее число на большее!\*

Можно привести и такой логический пример некомму-  
тативных отношений:

Виктор — сын Федора, но Федор не сын Виктора.  
Пять больше трех, но три не больше 5.

#### 4. Задачи на уменьшение и увеличение числа в несколько раз и на кратное сравнение величин

##### Одновременное изучение задач на уменьшение и увеличение числа в несколько раз

По характеру связей данная тройка задач совершенно  
аналогична тройке задач на действия первой ступени, а  
именно на уменьшение и увеличение числа на несколько  
единиц и разностное сравнение величин.

Соответственно оправдывается одновременное изу-  
чение первых двух задач и изучение сразу же задач на  
кратное сравнение величин.

Одновременное изучение задач на увеличение и  
уменьшение числа в несколько раз связано с изучением  
пар понятий (больше — меньше, старше — моложе, до-  
роже — дешевле и т.п.) в их постоянном противопостав-  
лении и взаимопереходах.

Рассмотрим задачу:

Нотная тетрадь стоит 6 коп., а блокнот в 4 раза  
дороже. Сколько стоит блокнот?

Учитель. Сколько стоит нотная тетрадь?

Ученик. Нотная тетрадь стоит 6 коп.

Учитель. Что сказано про цену блокнота?

Ученик. Блокнот стоит в 4 раза дороже.

Учитель. Что значит «дороже в 4 раза»?

\* Учитель найдет время (во II или III классе) сказать, что в старших  
классах они научатся и из меньшего числа вычитать большее ( $2 - 8 =$   
 $= -6$ ), и меньшее число делить на большее ( $2 : 8 = 1/4$ ).



Ученик. Это значит, что вместо одного блокнота можно купить на те же деньги четыре нотные тетради.

Учитель. Как найти стоимость четырех нотных тетрадей?

Ученик. По 6 коп. взять 4 раза, получится 24 коп.

Учитель. Четыре нотные тетради будут стоить 24 коп. Какова будет цена блокнота, если она больше цены нотной тетради в 4 раза?

Ученик. Цена блокнота тоже 24 коп.

Учитель. Почему? Как ты узнал?

Ученик. Потому что один блокнот стоит столько же, сколько четыре нотные тетради. По 6 взять 4 раза, получится 24.

После решения прямой задачи записывается ее схема:

6 коп., в 4 раза дороже, 24 коп.

Затем составляется обратная задача, в которой используется понятие «в 4 раза дешевле».

Учитель. Если блокнот дороже тетради в 4 раза, то что можно сказать о нотной тетради?

Ученик. Нотная тетрадь дешевле блокнота в 4 раза.

Записываем рядом с первой схемой схему обратной задачи:

?, в 4 раза дешевле, 24 коп.

С помощью учителя составляется обратная задача.

Учитель. Во сколько раз нотная тетрадь дешевле блокнота?

Ученик. Нотная тетрадь дешевле блокнота в 4 раза.

Учитель (показывает на число 24 коп.). Что означает это число?

Ученик. Блокнот стоит 24 коп.

Учитель. Что надо узнать в обратной задаче?

Ученик. Надо узнать цену нотной тетради.

Прочитывается полностью условие задачи:

Цена блокнота 24 коп. Нотная тетрадь в 4 раза дешевле блокнота. Найти цену нотной тетради.

Учитель. За что заплатили меньше денег: за блокнот или за нотную тетрадь? Во сколько раз заплатили меньше?



В прямой задаче мы выполнили умножение и нашли цену блокнота, так как за блокнот заплатили больше, чем за тетрадь. А за тетрадь заплатили в 4 раза меньше, чем за блокнот. Каким действием мы найдем цену тетради? Сколько стоит тетрадь?

Ученик. 24 коп. разделить на 4, получится 6. Одна тетрадь стоит 6 коп.

На доске и в тетрадях записываются рядом решения обеих задач:

Увеличение  
в несколько раз

6 коп., в 4 раза  
дороже, ☐

Решение:

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ (коп.)}$$

Уменьшение  
в несколько раз

☐, в 4 раза дешевле,  
24 коп.

Решение:

$$24 : 4 = 6 \text{ (коп.)}$$

(Стрелками показаны направления чтения условия задачи по схеме.)

После решения этих задач необходимо сравнить их условия решения.

Учитель. В прямой задаче была дана цена тетради. А что требовалось узнать?

Ученик. В прямой задаче была дана цена тетради — 6 коп. Надо было узнать цену блокнота.

Учитель. А как было в обратной задаче? Что было известно и что неизвестно?

Ученик. В обратной задаче была известна цена блокнота — 24 коп., а надо было найти цену тетради.

Учитель. Какое число входило в условия обеих задач?

Ученик. В обеих задачах было число «4 раза».

Учитель. В чем же тогда была разница между задачами? Какие слова стояли при этих числах?

Ученик. В прямой задаче было сказано: «в 4 раза дороже», а в обратной — «в 4 раза дешевле».

Учитель. Если дороже, то что это значит: заплатили больше или меньше? А если сказано дешевле?



Ученик. Дороже — значит больше, дешевле — значит меньше заплатили.

Учитель. Каким действием мы решили прямую задачу, обратную задачу?

Ученик. Прямую задачу мы решили умножением, а обратную задачу — делением.

Учитель. Когда мы умножаем, что происходит с числом? Оно увеличивается или уменьшается?

Ученик. Когда мы умножаем, число увеличивается; когда делим — уменьшается.

Учитель. Которая из этих задач на увеличение числа в несколько раз, на уменьшение числа в несколько раз?

Ученик. Первая задача на увеличение числа в несколько раз, вторая на уменьшение числа в несколько раз.

Такой подробный анализ проводится на первых уроках. В результате такого анализа задач в мышлении учащихся возникают связи двух родов:

1) если «дороже в 4 раза» → «больше в 4 раза» → «увеличить в 4 раза» → «умножить на 4»;

2) если «дешевле в 4 раза» → «меньше в 4 раза» → «уменьшить в 4 раза» → «разделить на 4».

Мы рассмотрели переход от задачи «на увеличение числа в несколько раз» к задаче «на уменьшение числа в несколько раз».

За такой парой задач следует применить обратный переход от задачи «на уменьшение числа в несколько раз» к задаче «на увеличение числа в несколько раз».

Рассмотрим задачу:

Отцу 36 лет, а сын в 4 раза моложе отца. Сколько лет сыну?

Решение:

$$36 : 4 = 9 \text{ (лет)}$$

Записывается схема задачи:

36 лет, в 4 раза моложе, 9 лет.

Составляется схема обратной задачи:

□, в 4 раза старше, 9 лет.

Здесь мы осуществили буквальное, как бы «машинное» преобразование задачи. Читая схему слева направо, как и в случае прямой задачи, получим следующее условие:



Отцу несколько лет. Сын в 4 раза моложе его. Сыну 9 лет. Сколько лет отцу?

Однако учащиеся без труда совершают в уме промежуточное преобразование информации:

Если сын моложе отца в 4 раза, то отец старше сына в 4 раза.

Поэтому можно схему обратной задачи сразу записывать в преобразованной форме:

☐ в 4 раза, 9 лет.

Формулируется ее условие: «Сыну 9 лет, а отец в 4 раза старше сына. Сколько лет отцу?»

Решение:

$$9 \cdot 4 = 36 \text{ (лет)}$$

Решения задач записываются рядом.

### Прямая

36 лет, в 4 раза моложе,  
9 лет

Решение:

$$36 : 4 = 9 \text{ (лет)}$$

Ответ. Сыну 9 лет.

### Обратная

☐ в 4 раза старше,  
9 лет

Решение:

$$9 \cdot 4 = 36 \text{ (лет)}$$

Ответ. Отцу 36 лет.

## Изучение кратного сравнения величин

Задачи на кратное сравнение величин составляют третью разновидность рассматриваемой группы задач. Их следует рассматривать в связи с предшествовавшими им задачами на увеличение и уменьшение числа в несколько раз.

В качестве главных наглядных пособий, посредством которых вводится кратное сравнение, наиболее удобны, как и в случае разностного сравнения, цветные бруски различной длины, расчерченные на кубики (на деления).

Пусть имеются 3 синих бруска, по 4 кубика в каждом, один красный и один синий брусок — длиной в 12 кубиков каждый.

Сначала берем один синий брусок в 4 кубика.

Учитель. Сколько кубиков в этом синем бруске?

Ученик. В синем бруске 4 кубика.



Учитель. Как увеличить брусок в 3 раза? Сколько раз надо взять для этого по такому синему бруску? Сколько всего получилось кубиков?

Ученик. По 4 взять 3 раза, получится 12 кубиков. (К 3 бруском, положенным вплотную в ряд, сверху накладываются синий и красный бруски.)

Выясняется, что эти бруски имеют по 12 кубиков.

Учитель. Если длинный брусок, состоящий из 12 кубиков, разделить на такие части (показывает маленькие бруски в 4 кубика), то сколько таких коротких брусков мы получим?

Ученик. Получим 3 таких бруска.

Учитель. Мы научились с вами сравнивать длины красного бруска в 12 кубиков и синего бруска в 4 кубика. Какой брусок длиннее? Короче? Во сколько раз?

Ученик. Красный брусок длиннее синего в 3 раза. Синий брусок короче красного в 3 раза.

Учитель. Каким действием мы нашли число 3?

Ученик. 12 кубиков разделить по 4 кубика, получится 3 (раза).

Рядом записываются условия и решения двух задач:

Увеличение  
в несколько раз

4 куб., в 3 раза больше,  
12 куб.

Решение:

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ (куб.)}$$

Кратное сравнение

4 куб.,  $\square$ , 12 куб.

Решение:

$$12 : 4 = 3 \text{ (раза)}$$

Затем решаются устно пары задач на сравнение длин зеленого бруска длиной в 5 кубиков и черного длиной в 10 кубиков и т.п.

В дальнейшем задачи решаются без наглядных пособий, причем в качестве исходной задачи может быть взята либо задача на уменьшение числа в несколько раз, либо задача на кратное сравнение.

Изучение темы завершается упражнениями, когда по одному сюжету и набору чисел составляются и решаются все три задачи.

Масса тюка 24 кг, а коробки — 3 кг. Во сколько раз тюк тяжелее коробки?



решение:

$$24 : 3 = 8 \text{ (раз)}$$

Записывается схема задачи:

24 кг, 3 кг, 8 раз

Составляется схема обратной задачи:

3 кг, □, 8 раз

и формулируется ее условие:

Масса коробки 3 кг, а тук в 8 раз тяжелее коробки.

Сколько килограммов в коробке?

Решение:

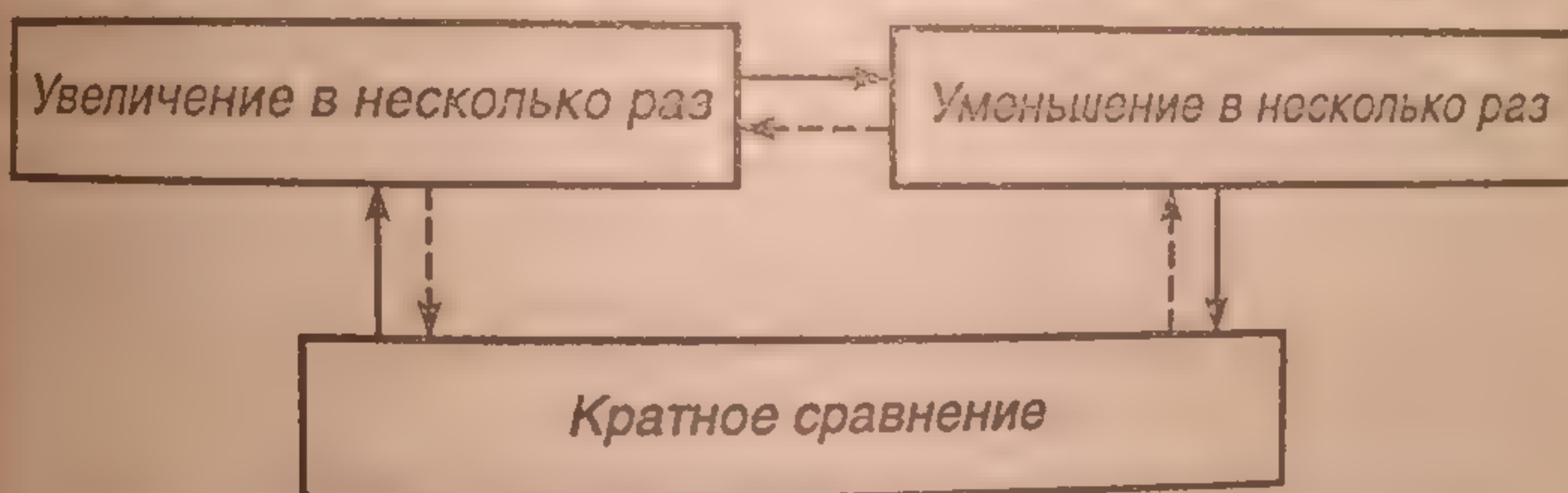
$$3 \cdot 8 = 24 \text{ (кг)}$$

Наконец составляется схема третьей задачи:

24 кг, □, 8 раз

Условие задачи: Масса тиска 24 кг, а коробки в 8 раз легче. Какова масса коробки?

В результате такой работы в мышлении учащегося возникает замкнутая система связей из трех задач.



## 5. Противопоставление задач на разностное и кратное сравнение

Одной из распространенных ошибок учащихся является подмена одного вида сравнения другим.

Чтобы выработать умение различать эти задачи, надо проводить противопоставленное их по трем линиям:

1) увеличение на несколько единиц и увеличение в несколько раз;

2) уменьшение на несколько единиц и уменьшение в несколько раз;

3) разностное сравнение и кратное сравнение.

Сравнение задач можно осуществлять так:



Увеличить на  
несколько единиц

Слева — 4 яблока, а  
справа на 3 яблока боль-  
ше. Сколько яблок справа?

Решение:  
 $4 + 3 = 7$  (ябл.)

Меньше на  
несколько единиц

Сверху нарисовано  
6 кружочков, а внизу на  
2 кружочка меньше.  
Сколько кружочков нари-  
совано внизу?

Решение:  
 $6 - 2 = 4$  (круж.)

На сколько единиц  
меньше (больше)

Мише 12 лет, а Нине  
3 года. На сколько лет  
Миша старше Нины?

Решение:  
 $12 - 3 = 9$  (л.)

Иногда следует решать задачи с несколькими вопро-  
сами, например: Валя купила 80 см красной ленты, а  
синей — 20 см. Ответить на следующие вопросы:

- 1) Сколько всего сантиметров ленты было куплено?
- 2) На сколько сантиметров красная лента длиннее синей?

3) Во сколько раз красная лента длиннее синей?  
Решение:

- 1)  $80 + 20 = 100$  (см);
- 2)  $80 - 20 = 60$  (см);
- 3)  $80 : 20 = 4$  (раза).

Целесообразно последнее упражнение сочетать со  
структурно противоположным упражнением, когда к

Увеличить  
в несколько раз

Слева — 4 яблока, а  
справа в 3 раза больше.  
Сколько яблок справа?

Решение:  
 $4 \cdot 3 = 12$  (ябл.)

Меньше в  
несколько раз

Сверху нарисовано  
6 кружочков, а внизу в  
2 раза меньше. Сколько  
кружочков нарисовано  
внизу?

Решение:  
 $6 : 2 = 3$  (круж.)

Во сколько раз  
меньше (больше)

Мише 12 лет, а Нине  
3 года. Во сколько раз  
Миша старше Нины?

Решение:  
 $12 : 3 = 4$  (раза)



данным числам придумываются три вопроса: «Книжка стоит 35 коп., а общая тетрадь — 5 коп.».

Поставить к этому условию три разных вопроса так, чтобы первый вопрос решался делением, второй — сложением, третий — вычитанием.

Решить составленные задачи.

Учащиеся находят в соответствии с заданием следующие вопросы к задаче:

1) Во сколько раз книга дороже тетради?

$$35 : 5 = 7 \text{ (раз)}$$

2) Сколько стоят вместе книга и тетрадь?

$$35 + 5 = 40 \text{ (коп.)}$$

3) На сколько копеек книга дороже тетради?

$$35 - 5 = 30 \text{ (коп.)}$$

При решении задач в несколько вопросов уместно обратить внимание учащихся не только на смысловые ассоциации, но и на связи низшего уровня. А именно, если в условии задачи встречаются два одноименных числа (имеющих одно и то же наименование), то они могут быть связаны одним из трех способов: либо делением, либо сложением, либо вычитанием, но не умножением.

#### **6. Задачи, в которых используется понятие «во сколько раз больше», а при решении выполняется деление**

Рассмотрим задачу:

Коля имеет 12 тетрадей, а Нина в 3 раза больше, чем Коля. Сколько тетрадей у Нины?

При решении этой задачи, как известно, проявляется следующая ассоциация: выражение «больше в 3 раза» вызывает мысль об увеличении числа, т.е. умножение его на 3.

На доске записывается схема задачи:

У Коли 12 тетр.

У Нины в 3 раза больше ( $\square$ ).

Решение:  $12 \cdot 3 = 36$  (тетр. у Нины).



После решения продолжилась следующая беседа:

— У кого было больше тетрадей и во сколько раз больше?

— У Нины было в 3 раза больше тетрадей, чем у Коли.

— У кого же было меньше тетрадей и во сколько раз меньше?

— У Коли было меньше тетрадей, чем у Нины, в 3 раза.

Условие той же задачи мы можем изобразить так: в нижней строке слова «в 3 раза больше» стираем и вместо них записываем в верхней строке «в 3 раза меньше»:

Коля — 12 т. в 3 раза меньше.

Нина —  $\square$ .

Учащиеся читают по схеме новое условие задачи:

У Коли 12 тетрадей. У Коли в 3 раза меньше тетрадей, чем у Нины. Сколько тетрадей у Нины?

Решение этой задачи будет связано с проявлением более длинной цепи связей.

У Коли в 3 раза меньше, чем у Нины  $\rightarrow$  у Нины в 3 раза больше, чем у Коли  $\rightarrow$  увеличить в 3 раза  $\rightarrow$  умножить на 3.

Точно так же разбирается вторая разновидность задачи в одно действие, в которой слова «меньше... раз» связывается с умножением, например:

Первоклассники собрали 20 кг бумаги. Они собрали в 2 раза меньше, чем второклассники. Сколько килограммов бумаги собрали второклассники?

Решение:

— Сколько килограммов бумаги собрали первоклассники? (Первоклассники собрали 20 кг бумаги.)

— Кто собрал меньше и во сколько раз? (Первоклассники собрали в 2 раза меньше второклассников.)

— Кто собрал больше и во сколько раз? (Второклассники собрали в 2 раза больше первоклассников.)

— Первоклассники собрали 20 кг, а второклассники в 2 раза больше. Сколько же собрали второклассники? Как это узнать? (20 кг увеличить в 2 раза, получится 40 кг).

Второклассники собрали 40 кг.

Сильным учащимся можно предлагать задачу в два действия, в которой первое действие основано на непо-



средственной связи (типа «больше  $\rightarrow$  увеличить»), а второе действие основано на проявлении опосредственной связи ( $A$  больше  $B \rightarrow B$  меньше  $A \rightarrow$  уменьшить).

Таких задач можно составить четыре варианта:

- 1) меньше и меньше (решение: деление и умножение);
- 2) меньше и больше (решение: деление и деление);
- 3) больше и больше (решение: умножение и деление);
- 4) больше и меньше (решение: умножение и умножение).

Составим, например, задачу третьего варианта:

У Вани было 10 карандашей, а у Сережи в 4 раза больше, чем у Вани. У Серёжи было в 2 раза больше, чем у Пети. Сколько карандашей было у Пети?

Решение:

- 1)  $10 \cdot 4 = 40$  (карандашей у Сережи);
- 2)  $40 : 2 = 20$  (карандашей у Пети).

Можно составить еще четыре разновидности задач, в которых, наоборот, первое действие осуществляется на основе опосредственной связи, а второе — на основе непосредственной связи;

- 5) меньше и меньше (решение: умножение и деление);
- 6) меньше и больше (решение: умножение и умножение);
- 7) больше и больше (решение: деление и умножение);
- 8) больше и меньше (решение: деление и деление).

Составим задачу седьмого варианта:

У Маши было 40 тетрадей. У нее было в 2 раза больше, чем у Оли. У Зины было в 4 раза больше тетрадей, чем у Оли. Сколько было тетрадей у Зины?

Решение:

- 1)  $40 : 2 = 20$  (тетрадей у Оли);
- 2)  $20 \cdot 4 = 80$  (тетрадей у Зины).

Наиболее смысловым учащимся в качестве задачи повышенной трудности можно предложить задачу из третьей четверки, в которой оба действия связаны с перестройкой связей.

Составим задачу, в которой использованы слова «дороже» и «дешевле», а решение выполняется соответственно действиями деления и умножения:

Книга стоит 40 коп. Книга дороже альбома в 2 раза. Альбом дешевле красок в 5 раз. Сколько стоят краски?



Решение:

1)  $40 : 2 = 20$  (коп. цена альбома);

2)  $20 \cdot 5 = 100$  (коп.) = 1 руб. (цена красок).

### 7. Составление обратных задач к задачам в два действия

После изучения всех трех видов задач в комплексе (на увеличение и уменьшение числа в несколько раз и на кратное сравнение) можно решать и обратные задачи, составленные к любой задаче с данными понятиями.

Пусть решена задача:

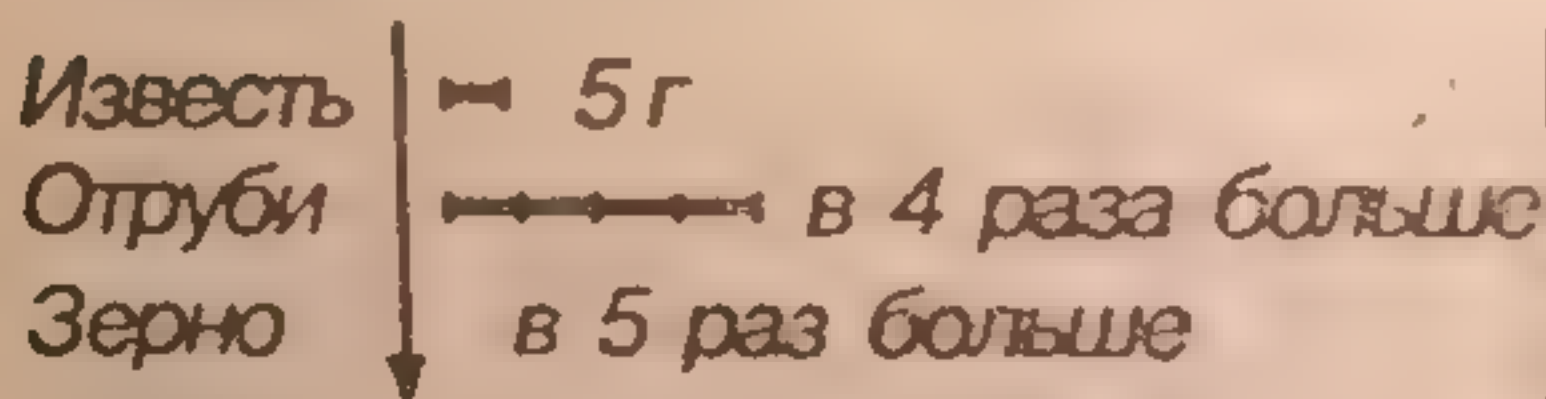


Рис. 21.

Гусю надо в день 5 г извести, а отрубей в 4 раза больше, чем извести; зерна же в день в 5 раз больше, чем отрубей. Сколько граммов зерна надо гусю в день? (Рис. 21.)

Решение:

1)  $5 \cdot 4 = 20$  (г) отрубей;

2)  $20 \cdot 5 = 100$  (г) зерна.

Записываем схему задачи:

5 г, 4 раза, 5 раз, 100 г

Составляем схему обратной задачи:

□, 4 раза, 5 раз, 100 г

Коллективно формулируем условие обратной задачи (числа в схеме перебираем справа налево):

Гусь съедает в день 100 г зерна, отрубей в 5 раз меньше, чем зерна, а извести в 4 раза меньше, чем отрубей. Сколько граммов извести съедает гусь в день?

Решение:

1)  $100 : 5 = 20$  (г) отрубей;

2)  $20 : 4 = 5$  (г) извести.

Чтобы составить еще обратную задачу, надо сделать неизвестным одно из чисел: «5 раз» или «4 раза».

Пусть мы остановились на следующей схеме:



5 г, 5 раз,  $\square$ , 100 г

Вместе с учащимися формулируем условие задачи: «Гусь съедает в день 5 г извести и 100 г зерна, отрубей съедает в 5 раз меньше, чем зерна. Сравнить, чего больше и во сколько раз больше съедает гусь за день: извести или отрубей?»

Наибольшую трудность вызывает соотнесение числа «5 раз» либо к 100 г, либо к 5 г. В этом месте учащимся приходится заменять смысловой оборот «зерна в 5 раз больше, чем отрубей» логически равносильным оборотом «отрубей меньше, чем зерна, в 5 раз».

Как только преодолен этот смысловой барьер, решение осуществляется легко. Условие задачи записывается так.

**Решение:**

1)  $100 : 5 = 20$  (г) отрубей;

2)  $20 : 5 = 4$  (раза).

Ответ. Гусь съедает отрубей в 4 раза больше, чем извести.

**8. Нахождение части числа, числа по величине его части; решение задач типа: «Какую часть составляет одно число от другого?»**

**Одновременное изучение задач на нахождение одной части числа и числа по величине одной его части**

Как мы уже отмечали выше, простейшие взаимно обратные задачи данного цикла целесообразно рассматривать одновременно.

Рассмотрим эту методику на конкретном примере.

Вводим понятия: половина (одна вторая), треть (одна третья), четверть (одна четвертая), одна пятая, для чего делим круг на соответствующее число долей. Вводим записи дробей:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}.$$

Учимся читать и записывать эти дроби. Затем проводим беседу:



— Сколько половин в одной булке? (Рис. 22.)



Рис. 22.

— В одной булке две половины, в одной булке две вторые доли.

Записываем так:  $1 = \frac{2}{2}$ .

— Сколько четвертей в одной целой булке?

— В одной целой четыре четверти.

Это записывается так:  $1 = \frac{4}{4}$ .

— Сколько третей в одном целом?

— В одном целом три трети.

Это записывается так:  $1 = \frac{3}{3}$ .

Впоследствии учащимся предлагаются следующие вопросы:

Сколько восьмых долей содержится в одном целом?

(Или символически:  $1 = \frac{8}{8}$ ).

В одном целом содержится пять долей. Какие это доли?

(Или символически:  $1 = \frac{5}{5}$ ).

Можно предложить и обобщенные задания:

$$1 = \frac{a}{a}$$

$$1 = \frac{x}{x}$$

Затем рассматриваются сразу два вида задач: на нахождение части числа и числа по величине его части. Для этого круг делится на четыре равные части.

Круг означает булку хлеба. Над ним записывается стоимость всей булки — 32 коп. (рис. 23).

Учитель. Булку хлеба разделили поровну четверем ученикам. Какую часть получил один ученик?

Ученик. Одному ученику досталась четвертая часть, или одна четвертая часть.



учитель. Что дороже: целая булка или четвертая ее часть? Во сколько раз дороже?

Прямая задача

Обратная задача

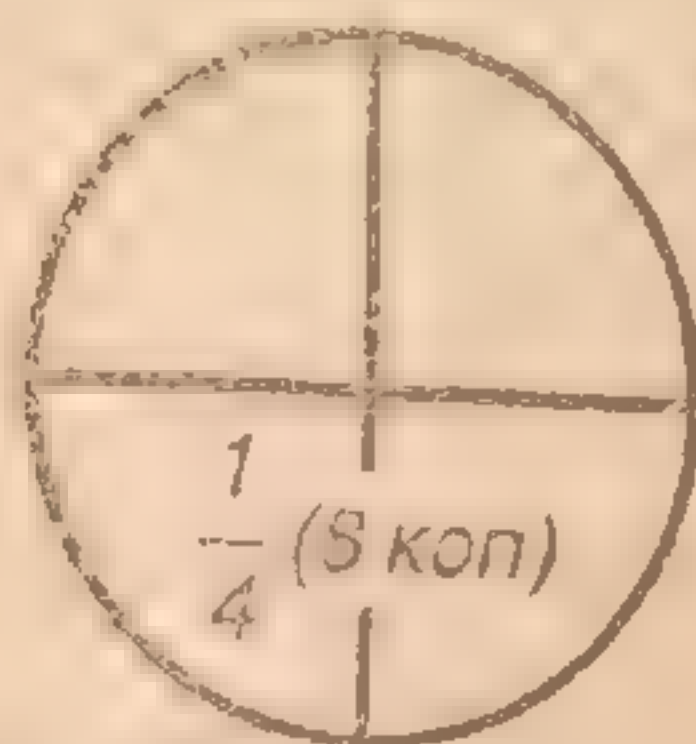
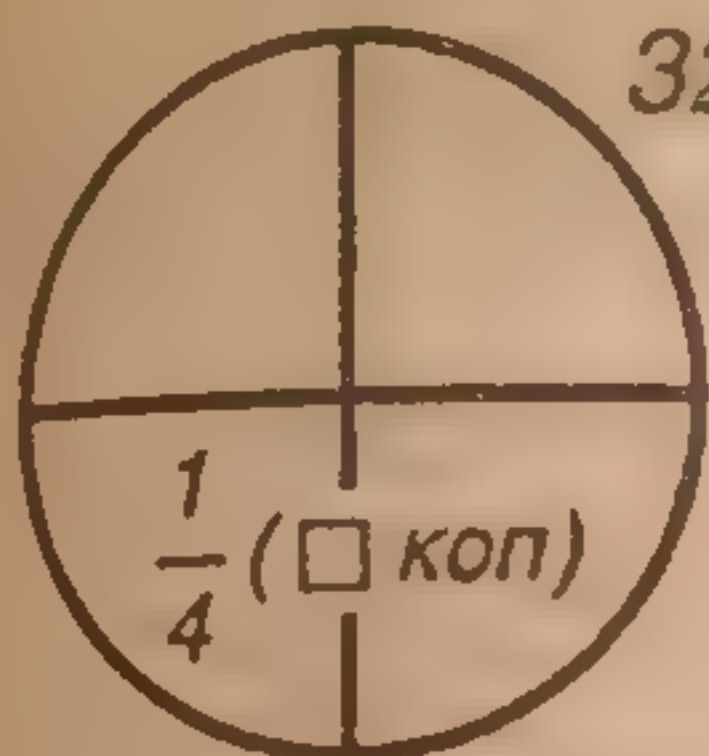


Рис. 23.

ученик. Целая булка дороже четвертой части в четыре раза.

Учитель. А как иначе сказать, применяя слово «дешевле»?

Ученик. Четвертая часть булки дешевле целой булки в четыре раза.

Учитель. Как найти, сколько стоит четвертая часть булки?

Ученик. 32 коп. разделить на четыре, получится 8 коп. Четвертая часть булки стоит 8 коп.

Далее составляется обратная задача:

Четвертая часть булки стоит 8 коп. Сколько стоит вся булка?

Что дороже: целая булка или ее четвертая часть? Во сколько раз дороже?

Как найти стоимость булки, зная стоимость ее четвертой части?

Ученик. Целая булка дороже ее четвертой части в четыре раза. 8 коп. умножить на 4, получится 32 коп.

Вся булка стоит 32 коп. После решения пары задач проводится заключительная беседа по сравнению условий обеих задач и процессов их решения.

Учитель, показывая на схему, спрашивает: «Какие числа были даны в прямой задаче?»

Ученик. 32 коп.,  $\frac{1}{4}$ .

Учитель. Что они означают?

Ученик. Булка стоит 32 коп. Надо найти, сколько стоит одна четвертая часть булки.



Учитель. А в обратной задаче какие числа были даны?

Ученик.  $\frac{1}{4}$ , 8 коп.

Учитель. Что обозначается этими числами?

Ученик. Одна четвертая часть булки стоит 8 коп.

Учитель. Скажите вопрос прямой задачи и вопрос обратной задачи.

Ученик. В прямой задаче надо найти, сколько стоит четвертая часть булки, в обратной — сколько стоит вся булка.

Учитель. Каким действием решили прямую задачу? Каким действием решили обратную задачу?

Ученик. Прямую задачу решили действием деления, обратную задачу — действием умножения. На следующих уроках можно предложить сначала задачу на нахождение числа по его части, а затем преобразовать ее в задачу на нахождение части числа.

Например, вначале решается задача:

Купили несколько яблок. Третья часть яблок составляет 7 штук. Сколько всего было яблок?

Решение:

$$7 \cdot 3 = 21 \text{ (ябл.)}$$

Записывается схема решенной задачи:

$$7 \text{ ябл.}, \frac{1}{3}, \boxed{21 \text{ ябл.}}$$

Составляется схема обратной задачи:

$$\square, \frac{1}{3}, 21 \text{ ябл.}$$

Формулируется ее условие: Купили 21 яблоко. Найти  $\frac{1}{3}$  часть их.

Решение:

$$21 : 3 = 7 \text{ (ябл.)}$$

Решения обеих задач записываются рядом.



Найти часть числа

$$21 \text{ ябл.}, \frac{1}{3}, \square$$

$$21 : 3 = 7 \text{ (ябл.)}$$

Найти число по его части

$$\square, \frac{1}{3}, 7 \text{ ябл.}$$

$$7 \cdot 3 = 21 \text{ (ябл.)}$$

## 9. Изучение внетабличного умножения и деления

Материал данного раздела можно разбить на группы:  
1, а, б) Умножение круглых десятков на однозначное число и наоборот; деление круглых десятков на однозначное число:

$$20 \cdot 4 \quad 4 \cdot 20 \quad 80 : 4$$

1, в) Деление двузначного числа на круглые десятки:

$$80 : 20$$

2, а, б) Умножение двузначного числа на однозначное и наоборот (без перехода через десяток); деление двузначного числа на однозначное без перехода через десяток:

$$23 \cdot 3 \quad 2 \cdot 23 \quad 46 : 2$$

2, в) Деление двузначного числа на двузначное без перехода через десяток на примерах вида:  $46 : 23$ .

3, а, б) Умножение и деление двузначного числа на однозначное с переходом через десяток на примерах вида:  $17 \cdot 3, 51 : 3$ .

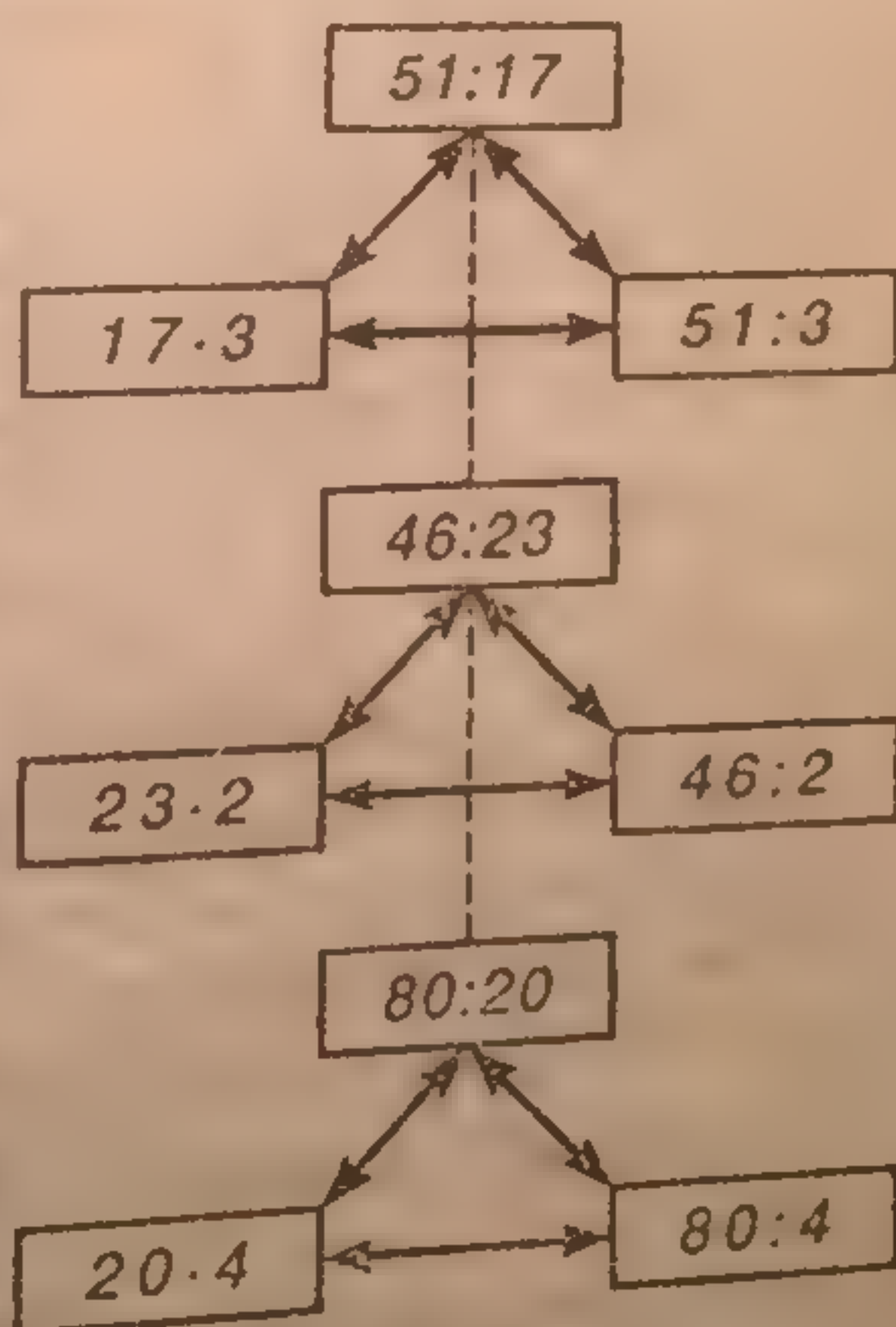


Рис. 24.



3, в) Деление двузначного числа на двузначное с переходом через десяток на примерах вида:  $51 : 17$ .

Каждая пара тем построена так, что смысловые связи, образовавшиеся при изучении предыдущей темы, используются и перестраиваются при изучении последующей темы, и тем самым достигается закрепление их на новой базе.

Эта система схематически представлена на рисунке 24.

### Одновременное решение примеров вида: $20 \cdot 4$ и $80 : 4$

Как известно, этот материал для учеников не представляет особой трудности, так как решение таких примеров сводится, в сущности, к действиям над однозначными числами.

В пределах 100 таких примеров насчитывается 16:  
 $10 \cdot 2, 10 \cdot 3, 10 \cdot 4, 10 \cdot 5, 10 \cdot 6, 10 \cdot 7, 10 \cdot 8, 10 \cdot 9,$   
 $20 \cdot 2, 20 \cdot 3, 20 \cdot 4, 20 \cdot 5, 30 \cdot 2, 30 \cdot 3, 40 \cdot 2, 50 \cdot 2.$

Перед их решением полезно вспомнить соответствующую пару примеров с однозначными числами:  
 $2 \cdot 4 = 8; 8 : 4 = 2.$

Рассмотрим задачу:

Четыре школьника собрали по 20 кг кукурузы. Сколько килограммов кукурузы они собрали вместе?

Учитель. Каждый школьник собрал по 20 кг кукурузы. Сколько собрали вместе 4 школьника?

Ученик. По 2 десятка взять 4 раза, будет 8 десятков, или 80.

Учитель. Скажи ответ полностью.

Ученик. 20 умножить на 4, получится 80.

Учитель. В данной задаче были числа 20 кг, 4 шк., и найденное число 80 кг. (Записывает схему: прямой задачи: 20 кг, 4 шк., 80 кг.)

Составьте обратную задачу по такой записи:  $\square$ , 4, 80 кг.

Ученик. 4 школьника собрали вместе 80 кг кукурузы. Сколько собрал каждый из них, если собирали они поровну?



учитель. Как решить задачу?

ученик. 80 разделить на 4

учитель. Сколько десятков в 80? Кто подробно объяснит решение?

Ученик. 80 — это 8 десятков, 8 десятков разделить на 4, получится 2 десятка, или 20.

На доске появляется запись:

Умножение

$$20 \cdot 4 = 80 \text{ (кг)}$$

Деление

$$80 : 4 = 20 \text{ (кг)}$$

Вторая пара примеров предлагается в ином порядке: сначала решается пример на деление ( $90 : 3 = 30$ ), потом учитель предлагает проверить ответ, для чего учащиеся составляют обратный пример на умножение и решают его:

$$30 \cdot 3 = 90$$

Затем решаются примеры попеременно на деление и умножение:

$$10 \cdot 8 = \quad 60 : 3 = \quad 100 : 2 = \quad 40 \cdot 1 = \text{ и т.д.}$$

Пусть решена пара примеров:

$$20 \cdot 3 = 60$$

$$3 \cdot 20 = 60$$

Переход от примера  $20 \cdot 3$  к примеру  $3 \cdot 20$  демонстрируется на основе переместительного закона: вместо того чтобы меньшее число (3) умножить на большее число (20), удобно большее число умножить на меньшее.

Как показывает наша практика, дети воспринимают примеры вида  $20 \cdot 3$  и  $3 \cdot 20$ , в сущности, как один и тот же пример и решают единым приемом: «20 — это 2 десятка; по 2 десятка взять 3 раза, получится 6 десятков, или 60. Значит,  $3 \cdot 20 = 20 \cdot 3 = 60$ ».



## Изучение деления круглых десятков на круглые десятки (80 : 20)

Для подготовки к изучению темы «Деление круглых десятков на круглые десятки» полезно решать примеры с пропущенными компонентами (на умножение и деление круглых десятков на однозначное число):

$$\begin{array}{ll} \square \cdot 4 = 80 & 30 \cdot \square = 60 \\ 90 : \square = 30 & \square : 4 = 20 \\ \square \cdot \square = 60 & \square : \square = 20 \\ \square \cdot \square = 60 & \square : 30 = 3 \text{ и т.д.} \end{array}$$

Так, например, решая пример  $60 : \square = 20$ , ученик, в сущности, выполняет пробы делителя: «60 разделить на 1, получится 60;  $60 > 20$ ; мало; пробуем 2:  $60 : 2 = 30$ ;  $30 > 20$ , мало; пробуем 3:  $60 : 3 = 20$ . Как раз!»

Нетрудно видеть, что почти то же самое выполняется при решении следующего примера:  $60 : 20 =$ .

Переходя к этому случаю, вначале надо исходить от прямой задачи на умножение:

Книга стоит 20 коп. Сколько стоят 3 такие книги?

Решение: По 2 десятка взять 3 раза, получится 6 десятков, или 60. 3 книги стоят 60 коп.

Учитель предлагает составить обратную задачу по записи: 20 коп.,  $\square$ , 60 коп.

Учащиеся формулируют условие задачи:

Одна книга стоит 20 коп. Сколько таких книг можно купить на 60 коп?

Учитель. Чтобы решить задачу, надо найти, сколько раз по 20 коп. содержится в 60 коп.

А как проще это сказать, используя слово «десятки»?

Ученик. Сколько раз по 2 десятка содержится в 6 десятках? 6 десятков поделить на 2 десятка, получится 3. Купили 3 книги.

После рассмотрения этой темы можно решать четверки примеров вида:



$$\begin{aligned}
 &40 \cdot 2 = 80 \\
 &2 \cdot 40 = 80 \\
 \text{или} \quad &30 : 3 = 10 \\
 &30 : 10 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &80 : 2 = 40 \\
 &80 : 40 = 2 \\
 &10 \cdot 3 = 30 \\
 &3 \cdot 10 = 30
 \end{aligned}$$

Так достигается полнота системы упражнений по данному циклу.

### Одновременное изучение умножения и деления двузначных чисел на однозначные без перехода через десяток

Изучение данной темы основано на операциях с круглыми десятками и единицами, т.е. на известном уже учащимся материале.

Решаем задачу: «На уроке физкультуры учащихся построили в 2 ряда, по 23 человека в каждом ряду. Сколько всего учащихся было построено?»

Целесообразной оказывается схема записи в 2 строки. Запись выполняется в следующей последовательности:

Говорим: «23 состоит из 2 десятков и 3 единиц» и эту мысль фиксируем так:

$$\begin{array}{r|l}
 23 \cdot 2 = \\
 \hline
 + 20 \cdot \\
 3 \cdot
 \end{array}$$

Учитель. На какие числа (слагаемые) мы разложили число 23?

Ученики. Число 23 мы разложили на два слагаемых: 20 и 3.

Потом учащиеся решают: «По 2 десятка взять 2 раза, получится 40; по 3 единицы взять 2 раза, получится 6» и соответственно запись доводится до следующего вида:



$$\begin{array}{r|l} 23 \cdot 2 = & \\ \hline 20 \cdot 2 = 40 & \\ 3 \cdot 2 = 6 & \end{array}$$

И наконец, произносим: «40 да 6 будет 46» и заканчиваем запись:

$$\begin{array}{r|l} 23 \cdot 2 = 46 & \\ \hline 20 \cdot 2 = 40 & \\ 3 \cdot 2 = 6 & \end{array}$$

Стрелки показывают направление операций: стрелка, направленная вниз, означает процесс разложения числа на слагаемые, а стрелка, направленная вверх, — процесс сложения промежуточных произведений слагаемых.

Стало быть, информацию о соединении двух слагаемых, обычно изображаемую примером:  $40 + 6 = 46$ , здесь несет стрелка, направленная вверх.

Учитель далее записывает схему решенной задачи:

23 уч., 2 ряда, 46 уч.

Затем предлагает составить обратную задачу по схеме:

□ уч., 2 ряда, 46 уч.

Ученики. 46 учащихся стояли в двух одинаковых рядах. Сколько учащихся стояло в каждом ряду?

Учитель. Прямую задачу мы решили умножением: по 23 взять 2 раза, получится 46. Каким действием будем решать обратную задачу? Сколько получилось? Как вы считали? Расскажите подробно?

Ученик. Обратную задачу надо решить делением: 46 учащихся разделить на 2.

46 — это 4 десятка и 6 единиц. 4 десятка разделить на 2, получится 2 десятка; 6 единиц разделить на 2, получится 3 единицы.

46 разделить на 2, получится 23.

По ходу решения обоих примеров на доске и в тетрадях появляется следующая запись:



## Умножение

$$23 \cdot 2 = 46$$

$$20 \cdot 2 = 40$$

$$3 \cdot 2 = 6$$

## Деление

$$46 : 2 = 23$$

$$40 : 2 = 20$$

$$6 : 2 = 3$$

Уяснению сущности поразрядного действия при умножении и делении помогают упражнения по восстановлению неизвестных чисел в деформированной записи:

$$\square \cdot 3 = \square$$

$$30 \cdot \square = \square$$

$$2 \cdot \square = \square$$

$$\square : 4 =$$

$$\square : 4 = 20$$

$$\square : 4 = 1$$

Решаем пример:

$$\square \cdot 3 =$$

$$30 \cdot 3 =$$

$$2 \cdot 3 =$$

Найдем промежуточные произведения:  $30 \cdot 3 = 90$ ,  $2 \cdot 3 = 6$ .

Запись приобретает вид:

$$\square \cdot 3 =$$

$$30 \cdot 3 = 90$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

- Какое же число получилось после умножения?
  - Следуя зрительно по направлению правой стрелки вверх, учащиеся находят сумму:  $90 + 6 = 96$ .
  - Какое же число умножили? (Число состоит из 30 и 2; значит, это  $30 + 2 = 32$ .)
- Запись восстанавливается полностью.  
Затем читается пример: 32 умножить на 3, получится 96.



Восстановление пропущенных чисел в деформированной записи позволяет учащимся увидеть «скрытую сторону» в зависимостях между числами.

Если при решении обычного примера множимое (или делимое) только разлагается на слагаемые (связь «сумма  $\rightarrow$  слагаемое»), то при восстановлении записи множимое (или делимое) образуется из слагаемых (т.е. проявляется связь «слагаемые  $\rightarrow$  сумма»).

### 10. Изучение деления двузначных чисел на двузначное без перехода через десяток

При подготовке к изучению этой темы большое значение имеет решение деформированных примеров вида:

$$\square \cdot 3 = 63$$

$$24 \cdot \square = 48$$

$$\square : 4 = 12$$

$$93 : \square = 31 \text{ и т.д.}$$

Например, при решении примера  $24 \cdot \square = 48$  учащиеся путем проб подбирают множитель: «24 возьмем один раз, будет 24; должно же быть 48, мало, 24 возьмем 2 раза, будет 48, годится».

Именно такие пробы требуются при решении примеров на деление вида:  $48 : 24 = \square$ .

Учитель. Мы решили с вами пример  $24 \cdot \square = 48$  путем проб. Сначала предположили, что в 48 по 24 содержится один раз — оказалось мало; потом предположили, что содержится два раза — это оказалось правильным.

Так же решается пример  $48 : 24$  (48 разделить по 24, получится 2).

Рассмотрим задачу:

Одна книга стоит 43 коп. Сколько книг можно купить на 86 коп?

Учитель. Как решить данную задачу? Каким действием мы решаем?

Ученик. 86 коп. разделить на 43 коп.



учитель (записывает на доске:  $86 : 43$ ). А как прочи-  
тать иначе выражение:  $86 : 43$ ?

ученик. Сколько раз содержится по 43 коп. в 86 коп?

учитель. Задача решается пробами. Пусть содер-  
жится один раз по 43. Сколько это будет?

ученик. По 43 коп. взять один раз, получится 43 коп.

учитель. Сколько же должно быть?

ученик. Должно быть 86.

учитель. Значит, один раз — мало. Возьмем два  
раза по 43. Сколько это будет?

ученик. 43 — это 4 десятка и 3 единицы; по 4 десятка  
взять 2 раза, получится 8 десятков; по 3 единицы взять

2 раза, получится 6 единиц. 8 десятков да 6 единиц  
будет 86.

Учитель. Прочитайте пример полностью.

Ученик. 86 разделить на 43, получится 2.

После изучения примеров типа  $86 : 2$  становится воз-  
можным решать четверки примеров вида:

$$\begin{array}{ll} 24 \cdot 2 = 48 & 48 : 2 = 24 \\ 2 \cdot 24 = 48 & 48 : 24 = 2 \end{array}$$

В заключение отметим, что для тренировки учащихся  
в четверке взаимно обратных примеров на внетаблич-  
ное умножение и деление удобно решать все виды задач  
на приведение к единице.

Решим задачу:

Три книги стоят 96 коп. Сколько стоят 2 такие книги?

Записываем кратко  
условие задачи:

3 книги — 96 коп.

2 книги —  $\square$ .

Далее составляется  
обратная задача:

3 книги —  $\square$  коп.

2 книги — 64 коп.

Рассмотрим еще задачу:

$\square$  — 96 коп.

2 книги — 64 коп.

Решение:

1)  $96 : 3 = 32$  (коп.);

2)  $32 \cdot 2 = 64$  (коп.).

Решение:

1)  $64 : 2 = 32$  (коп.);

2)  $32 \cdot 3 = 96$  (коп.).

Решение:

1)  $64 : 2 = 32$  (коп.);

2)  $96 : 32 = 3$  (книги).



И последняя задача:  
3 книги — 96 коп.  
☐ книг — 64 коп.

Решение:  
1)  $96 : 3 = 32$  (коп.);  
2)  $64 : 32 = 2$  (книги).

### 11. Изучение умножения и деления двузначного числа на однозначное с переходом через десяток

Методику изучения данной темы удобно построить так:

1) Вначале одновременно рассматривается умножение двузначного числа на однозначное и однозначного на двузначное, причем здесь применяется переместительный закон умножения ( $3 \cdot 27 = 27 \cdot 3 = 81$ ).

2) На втором этапе одновременно рассматриваются умножение и деление на однозначное число. На этом этапе можно рассматривать тройки взаимосвязанных примеров:

$$27 \cdot 3 \quad 3 \cdot 27 \quad 81 : 3$$

3) Последний этап — решение примеров на деление двузначного числа на двузначное. Здесь уже решаются четверки взаимосвязанных примеров:

$$\begin{array}{cc} 27 \cdot 3 & 3 \cdot 27 \\ 81 : 3 & 81 : 27 \end{array}$$

#### Одновременное изучение умножения на примерах вида: $27 \cdot 3$ и $3 \cdot 27$

Рассмотрим пример:  $27 \cdot 3 =$

Учитель. Из каких разрядных единиц состоит число 27? Сколько в нем десятков и единиц?

Ученик. 27 состоит из 2 десятков и 7 единиц.

Учитель. Чтобы умножить 27 на 3, надо 2 десятка умножить на 3 и 7 единиц умножить на 3. Сколько же получится?

Ученик. По 2 десятка взять 3 раза, получится 6 десятков, или 60. По 7 единиц взять 3 раза, получится 21

Учитель. 60 да 21 — сколько это будет?

Ученик. К 60 прибавить 21, получится 81.



После решения этого примера учащимся предлагается составить обратный пример на умножение.

ученик. По 3 взять 27 раз.

учитель. 27 состоит из 20 и 7. Поэтому по 3 сначала возьмем 20 раз. Вместо того чтобы по 3 взять 20 раз, легче по 20 взять 3 раза. Сколько это будет?

ученик. По 2 десятка взять 3 раза, будет 6 десятков. Или по 3 взять 20 раз, будет 60. Еще по 3 взять 7 раз, получится 21.

учитель. 60 да 21 — сколько это будет?

ученик. 60 да 21 — всего 81.

учитель. Скажите ответ полностью.

ученик. По 3 взять 27 раз, будет 81.

По ходу этой беседы учитель записывает на доске рядом решения двух примеров:

$$\begin{array}{r} 27 \cdot 3 = 81 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \cdot 3 = 60 \\ 7 \cdot 3 = 21 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 27 = 81 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 20 = 60 \\ 3 \cdot 7 = 21 \\ \hline \end{array}$$

После решения первой пары следующая пара примеров предлагается в другой последовательности, сначала предлагается пример на умножение однозначного числа на двузначное:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 46 = 92 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 40 = 80 \\ 2 \cdot 6 = 12 \\ \hline \end{array}$$

Затем учащиеся самостоятельно составляют и решают пример на умножение при переставленных множителях:

$$\begin{array}{r} 46 \cdot 2 = 92 \\ \hline \end{array}$$

$$40 \cdot 2 = 80$$

$$6 \cdot 2 = 12$$

При решении этих примеров учащиеся пользовались переместительным свойством умножения:



$$2 \cdot 40 = 40 \cdot 2 = 80; \quad 2 \cdot 6 = 6 \cdot 2 = 12$$

$$\text{или } 2 \cdot 46 = 46 \cdot 2 = 92$$

Учитель. В первом примере мы однозначное число умножили на двузначное ( $2 \cdot 46$ ), а во втором примере двузначное число умножили на однозначное ( $46 \cdot 2$ ). Какой пример легче решить?

Ученик. Легче двузначное число умножить на однозначное.

Следовательно, пример вида  $2 \cdot 40$  мы решали не приемом последовательного умножения ( $2 \cdot 40 = 2 \cdot 4 \cdot 10 = 8 \cdot 10 = 80$ ), а посредством использования переместительного закона, рассуждая так: «Вместо того чтобы по 2 взять 40 раз, удобнее по 40 взять 2 раза, получится 80 (столько же)».

Таким образом, хотя решения двух примеров и записываются по-разному, но решаются они на основе одних и тех же связей. В этом-то и заключается преимущество одновременного решения двух примеров, позволяющее находить и использовать общие моменты в их решениях.

Полезно иногда решать примеры на восстановление деформированной записи, например:

$$\begin{array}{l} \square \cdot 4 = 92 \\ \hline 20 \cdot \square = \\ 3 \cdot \square = \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \square \cdot \square = \\ \hline \square \cdot 20 = 80 \\ \square \cdot 3 = 12 \end{array}$$

К концу изучения данной темы можно решать примеры с пропущенными компонентами вида:

$$\square \cdot 4 = 52 \quad 13 \cdot \square = 52$$

Решение первого примера служит подготовкой к изучению деления двузначного числа на однозначное:

$$52 : 4 =$$

Особое значение для следующей темы имеет решение деформированного примера вида:

$$16 \cdot \square = 96$$



Этот пример решается также пробами (как и пример:  $96 : 16 = \square$ ). Сначала попробуем множитель 5. По 16 взять 5 раз, будет 80, должно быть 96, 80 меньше 96; множитель 5 мал, возьмем следующее число 6. По 16 взять 6 раз, получится 96, верно.

### Одновременное изучение умножения и деления двузначных чисел на однозначное число ( $17 \cdot 2$ ; $34 : 2$ )

При изучении данного вопроса, по существу, продолжается изучение умножения на однозначное число.

Рассмотрим пример:  $17 \cdot 2 = 34$ .

Учитель. Кто составит обратный пример на деление?

Ученик. 34 разделить на 2.

Учитель. Как мы получили 34 при решении предыдущего примера?

Ученик. К 20 прибавить 14, получится 34.

Учитель. При умножении мы сложили два числа: 20 и 14, получили 34. При делении 34 на 2 нам надо число 34 разложить на слагаемые 20 и 14. Сначала разделим первое слагаемое на 2, а потом 14 разделим на 2. Сколько же получится?

Ученик. 20 разделить на 2, получится 10; 14 разделить на 2, получится 7.

Учитель. 10 да 7 — сколько это будет?

Ученик. Будет 17.

34 разделить на 2, получится 17.

Учитель постепенно записывает на доске решения пары примеров:

$$17 \cdot 2 = 34$$

$$10 \cdot 2 = 20$$

$$7 \cdot 2 = 14$$

$$34 : 2 = 17$$

$$20 : 2 = 10$$

$$14 : 2 = 7$$

Рассматривается еще пример на деление:

$$58 : 2 =$$

Учитель. Из каких слагаемых состоит число 58?



Ученик. 58 состоит из 5 десятков и 8 единиц.

Учитель. Нам надо 58 разложить на два слагаемых, чтобы после деления первого слагаемого получились десятки. Делится ли 5 на 2? Нет. Сколько десятков надо взять, чтобы в частном получились десятки?

Ученик. Возьмем 4 десятка.

Учитель. Все число равно 58. Если отделим 4 десятка, то какое еще число останется от 58?

Ученик. Еще останется 18 ( $58 - 40 = 18$ ).

Учитель. Из каких же чисел (слагаемых) состоит 58?

Ученик. 58 состоит из двух слагаемых: 40 и 18 ( $40 + 18 = 58$ ).

Учитель последовательно записывает результаты этих рассуждений на доске:

$$\begin{array}{r} 58 : 2 = \\ \hline 40 : 2 = \\ 18 : 2 = \end{array}$$

$$2 =$$

$$58 : 2 = 29$$

$$40 : 2 = 20$$

$$18 : 2 = 9$$

Учитель. Мы выполнили деление. А как проверить деление? Составьте для этого обратный пример на умножение.

Коллективно составляется и решается пример:  $29 \cdot 2 = 58$ .

Затем решаются примеры на умножение и деление.

Нередко учащиеся решают примеры на деление иначе, например, так:

$$96 : 2 = 48$$

$$60 : 2 = 30$$

$$36 : 2 = 18$$

## 12. Изучение деления двузначного числа на двузначное с переходом через десяток

Здесь также следует подойти к примеру на деление через исходный пример на умножение.

Сначала решаем пример:

$$16 \cdot \square = 64$$



Потом предлагаем составить обратный пример на деление:

$$64 : 16 = \square$$

учитель. Как решить пример на деление? А как мы решали предыдущий пример на умножение? Мы решали пробами.

Пробовали последовательно множителями 2, 3, 4. Таким же способом — пробами — решается пример на деление:  $64 : 16$ .

Сначала возьмем частное 2. (На доске записывается  $64 : 16 = 2$ .)

Правильно ли мы решили? Как проверить ответ? Каким действием мы раньше проверяли деление?

Ученик. Мы проверяли умножением: по 16 взять 2 раза, получится 32.

Учитель. Должно же получиться 64. 32 меньше 64; 2 — мало. Проверим следующее частное 3. Кто проверит?

Ученик. По 16 взять 3 раза, получится 48.

Учитель. Годится ли число 3 для частного? Что дальше делаем?

Ученик. По 16 взять 4 раза, получится 64. Правильно.

Учитель. Прочитай решенный пример.

Ученик. 64 разделить на 16, получится 4.

Дальше предлагается сразу пример на деление:

$$84 : 28 =$$

Надо показать учащимся способ выбора первого числа для пробы. Закрываем единицы в делимом и делителе:  $8\square : 2\square =$ .

Учитель (указывает): «Здесь 8 десятков, а здесь 2 десятка. Сколько раз по 2 десятка содержится в 8 десятках?» (4 раза.)

Попробуем частным число 4.

По 20 взять 4 раза, получится 80; по 8 взять 4 раза — 32, 80 да 30 — много, больше 100.

Пробуем частным следующее меньшее число — 3 и т.д.

Таким образом, пробы можно начинать и с большего числа.



После изучения этого раздела становится возможным составлять и решать четверки таких примеров:

$$\begin{array}{ll} 28 \cdot 3 = 84 & 84 : 3 = 28 \\ 3 \cdot 28 = 84 & 84 : 28 = 3 \end{array}$$

Дети с интересом решают примеры с пропущенными компонентами:

$$\begin{array}{ll} \square \cdot 3 = 57 & \square : 3 = 27 \\ 39 \cdot \square = 78 & 54 : \square = 2 \end{array}$$

В качестве упражнения повышенной трудности для наиболее сильных учащихся можно предлагать неопределенные примеры:

$$\begin{array}{ll} \square \cdot \square = 56 & \square : \square = 25 \\ \square \cdot \square = 56 & \square : \square = 25 \\ \square \cdot \square = 56 & \square : \square = 25 \end{array}$$

Чем сообразительнее ученик, тем больше найдет он различных вариантов решения неопределенного примера:

$$\begin{array}{ll} 7 \cdot 8 = 56 & 50 : 2 = 25 \\ 14 \cdot 4 = 56 & 75 : 3 = 25 \\ 28 \cdot 2 = 56 & 100 : 4 = 25 \end{array}$$

### 13. О возможном слиянии концентратора «сотня» с некоторыми вопросами концентратора «тысяча»

Выше мы говорили, что при изучении сложения и вычитания в пределах 100 оказывается выгодным, широко пользуясь умозаключениями по аналогии, захватывать одновременно соответствующие действия первой ступени над круглыми десятками в пределах 1000:

$$23 + 19 = 42 \rightarrow 230 + 190 = 420$$

Столь же доступным и экономным оказывается слияние умножения и деления в пределах 100 с соответствующими случаями умножения и деления круглых десятков в пределах 1000.



В нашем многолетнем эксперименте было осуществлено изучение во II классе всех случаев табличного умножения и деления одновременно с соответствующими действиями над круглыми десятками в пределах 1000.

Тут же действия над отвлеченными числами совмещались с соответствующими действиями над именованными числами:

$$\begin{array}{ll} 5 \cdot 7 = 35 & 35 : 7 = 5 \\ 7 \cdot 5 = 35 & 35 : 5 = 7 \\ 50 \cdot 7 = 350 & 350 : 7 = 50 \\ & 350 : 70 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 50 \text{ коп.} \cdot 7 = 3 \text{ руб. } 30 \text{ коп.} \\ 350 \text{ см} : 50 \text{ см} = 7 \text{ (раз) и т.д.} \end{array}$$

Основным приемом такой методики является решение групп примеров, на которых дети улавливают общие совпадающие моменты в процессах рассуждения.

Рассмотрим примеры:

- $2 \cdot 4$  По 2 единицы взять 4 раза, будет 8 единиц.
- $20 \cdot 4$  По 2 десятка взять 4 раза, будет 8 десятков, или 80.
- $200 \cdot 4$  По 2 сотни взять 4 раза, будет 8 сотен, или 800.
- $8 : 4$  8 единиц разделить на 4, будет 2 единицы.
- $80 : 4$  8 десятков разделить на 4, будет 2 десятка, или 20.
- $800 : 4$  8 сотен разделить на 4, будет 2 сотни, или 200.

Эти операции целесообразно иллюстрировать на счетах.

В практике обучения нередко решения примеров  $50 \cdot 7$ ;  $350 : 7$ ; 3 ц 50 кг; 50 кг и т.п. отнесены к разным темам, и тренировка в них выполняется со значительным разрывом во времени.

Опытное изучение показало, что эти примеры выгодно рассматривать совместно с самого начала изучения



табличного умножения и деления, показывая переход от единиц к десяткам на парных примерах.

Рассуждения проводятся примерно следующие:

$$5 \cdot 7 = 35$$

$50 \cdot 7 = 350$ ; пятью семь — тридцать пять; по пять десятков взять 7 раз, получится 35 десятков, или 350.

$$35 : 7 = 5$$

$350 : 7 = 50$ ; 35 разделить на 7, получится 5; 350 разделить на 7 (т.е. 35 десятков разделить на 7), получится 5 десятков, или 50.

В тренировочных и контрольных заданиях упражнений на табличные случаи и на соответствующие действия над круглыми десятками (как в обычных, так и в деформированных заданиях) должно быть больше, так как решение примера с круглыми десятками ( $30 \cdot 9 = 270$ ) включает в себя и решение соответствующего табличного случая ( $3 \cdot 9 = 27$ ).

Приведем образец набора упражнений (после изучения таблицы умножения и деления по 6):

$$6 \cdot 5 =$$

$$360 : 60 =$$

$$60 \cdot 5 =$$

$$\square : 60 = 120$$

$$\square : 9 = 60$$

$$\square : 7 = 60$$

$$\square \cdot 30 = 180$$

$$\square : 60 = 8$$

$$4 \cdot \square = 240$$

$$600 : 10 = \square$$

Действия над круглыми десятками привязываются и к изучению умножения и деления двузначных чисел на однозначные.

Рассмотрим примеры:

$$21 \cdot 4 = 84$$

$$20 \cdot 4 = 80$$

$$1 \cdot 4 = 4$$

По 2 десятка взять 4 раза, будет 8 десятков. По 1 единице взять 4 раза, будет 4 единицы. 8 десятков да 4 единицы — 84 единицы.

Затем рядом записывается пример, отличающийся от предыдущего лишь припиской нуля:



$$\begin{aligned} 210 \cdot 4 &= 840 \\ 200 \cdot 4 &= 800 \\ 10 \cdot 4 &= 40 \end{aligned}$$

По 2 сотни взять 4 раза, будет 8 сотен. По 1 десятку взять 4 раза, будет 4 десятка. 8 сотен да 4 десятка — 840.

Однако действия над круглыми десятками предпочтительнее выполнять иначе, сводя рассуждения непосредственно к предыдущему случаю:

210 — это 21 десяток;

21 единицу умножить на 4, будет 84 единицы;

21 десяток умножить на 4, будет 84 десятка, или 840.

Обратим внимание на то, что в основе совместного рассмотрения действий в пределах 100 и 1000 находятся операции перехода от единиц к десяткам и наоборот.

Приведем образцы заданий по данной теме.

В числе 60 десятков. Напишите это число. Прочитайте его. Зачеркните один нуль справа. Как изменилось число? Во сколько раз? Какое теперь число получилось?

Дано число 870. Разделите его на 10 (уменьшите в 10 раз). Сколько получилось?

Дано некоторое число с нулем на конце. Это число уменьшили в 10 раз. Какое число получилось? Придумайте такой пример.

Такие упражнения целесообразно предлагать в форме деформированных примеров и при изучении нумерации чисел в пределах 1000:

$$\begin{aligned} \square \text{ д.} &= 370 \text{ ед.} \quad (\text{с. — сотни}) \\ 81 \text{ д.} &= \square \text{ ед.} \quad (\text{д. — десятки}) \\ \square \text{ д.} &= 600 \text{ ед.} \quad (\text{ед. — единицы}) \\ 90 \text{ д.} &= \square \text{ ед.} \end{aligned}$$

Необходимо давать упражнения, где требуется показать, что приписывание нуля приводит к увеличению числа в 10 раз, а зачеркивание нуля к уменьшению числа в 10 раз.

Рассмотрим пример на умножение:

$$27 \cdot 3 = 81$$

Учитель. Прочитайте пример.

Ученик. 27 умножить на 3, получится 81.



Учитель. Прочитайте данный пример, употребляя слово «единицы».

Ученик. 27 единиц умножить на 3, получится 81 единица.

Учитель. Припишите к одному из множителей и произведению по нулю. Прочитайте полученный пример. Верно ли вы нашли произведение?

Ученик.  $270 \cdot 3 = 810$ .

Двести семьдесят умножить на 3, получится 810.

Учитель. Прочитайте этот пример, употребляя слово «десятки».

Ученик. 27 десятков умножить на 3, получится 81 десяток, или 810.

Рассмотрим пример на деление:

$$520 : 4 = 130$$

Учитель. Прочитайте пример.

Ученик. 520 разделить на 4, получится 130.

Учитель. Прочитайте пример, употребляя слово «единицы».

Ученик. 520 единиц разделить на 4, получится 130 единиц.

Учитель. Прочитайте пример, употребляя слово «десятки».

Ученик. 52 десятка разделить на 4, получится 13 десятков, или 130.

Учитель. Зачеркните по одному нулю в делимом и частном. Прочитайте полученный пример.

Ученик. 52 единицы разделить на 4, получится 13 единиц.

Одновременно с устным решением примеров с отвлеченными числами надо решать примеры и задачи с именованными числами.

Приведем образцы таких примеров:



$$7 \cdot 6 =$$

$$70 \cdot 6 =$$

$$70 \text{ см} \cdot 6 = 420 \text{ см} =$$
$$= 4 \text{ м } 20 \text{ см}$$

$$17 \cdot 4$$

$$170 \cdot 4$$

$$1 \text{ руб. } 70 \text{ коп.} \cdot 4 =$$

$$= 170 \text{ коп.} \cdot 4 =$$

$$= 680 \text{ коп.} =$$

$$= 6 \text{ руб. } 80 \text{ коп.}$$

$$214 \cdot 2 = 428$$

$$2 \text{ м } 1 \text{ дм } 4 \text{ см} \cdot 2 =$$

$$= 4 \text{ м } 2 \text{ дм } 8 \text{ см}$$

$$13 \cdot 7$$

$$130 \cdot 7$$

$$1 \text{ ц } 30 \text{ кг} \cdot 7$$

$$130 \text{ кг} \cdot 7 = 910 \text{ кг} =$$

$$= 9 \text{ ц } 10 \text{ кг}$$

$$42 : 6$$

$$420 : 6$$

$$4 \text{ м } 20 \text{ см} : 6 =$$

$$= 420 \text{ см} : 6 = 70 \text{ см}$$

$$68 : 4$$

$$680 : 4$$

$$6 \text{ руб. } 80 \text{ коп.} : 4 =$$

$$= 680 \text{ коп.} : 4 =$$

$$= 170 \text{ коп.} = 1 \text{ руб. } 70 \text{ коп.}$$

$$428 : 2$$

$$4 \text{ м } 2 \text{ дм } 8 \text{ см} : 2 =$$

$$= 2 \text{ м } 1 \text{ дм } 4 \text{ см}$$

$$91 : 7$$

$$910 : 7$$

$$9 \text{ ц } 10 \text{ кг} : 7$$

$$910 \text{ кг} : 7 = 130 \text{ кг} =$$

$$= 1 \text{ ц } 30 \text{ кг}$$

$$910 \text{ кг} : 130 \text{ кг} = 7 \text{ (раз)}$$



# Глава VI

## ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ АРИФМЕТИКИ

### 1. Сопоставление переместительного закона сложения и умножения

Переместительный закон сложения и умножения, изучаемый сначала порознь, впоследствии полезно сравнить и записать рядом в двух столбцах.

На доске и в тетрадях этот закон можно изобразить графически и буквами (рис. 25).

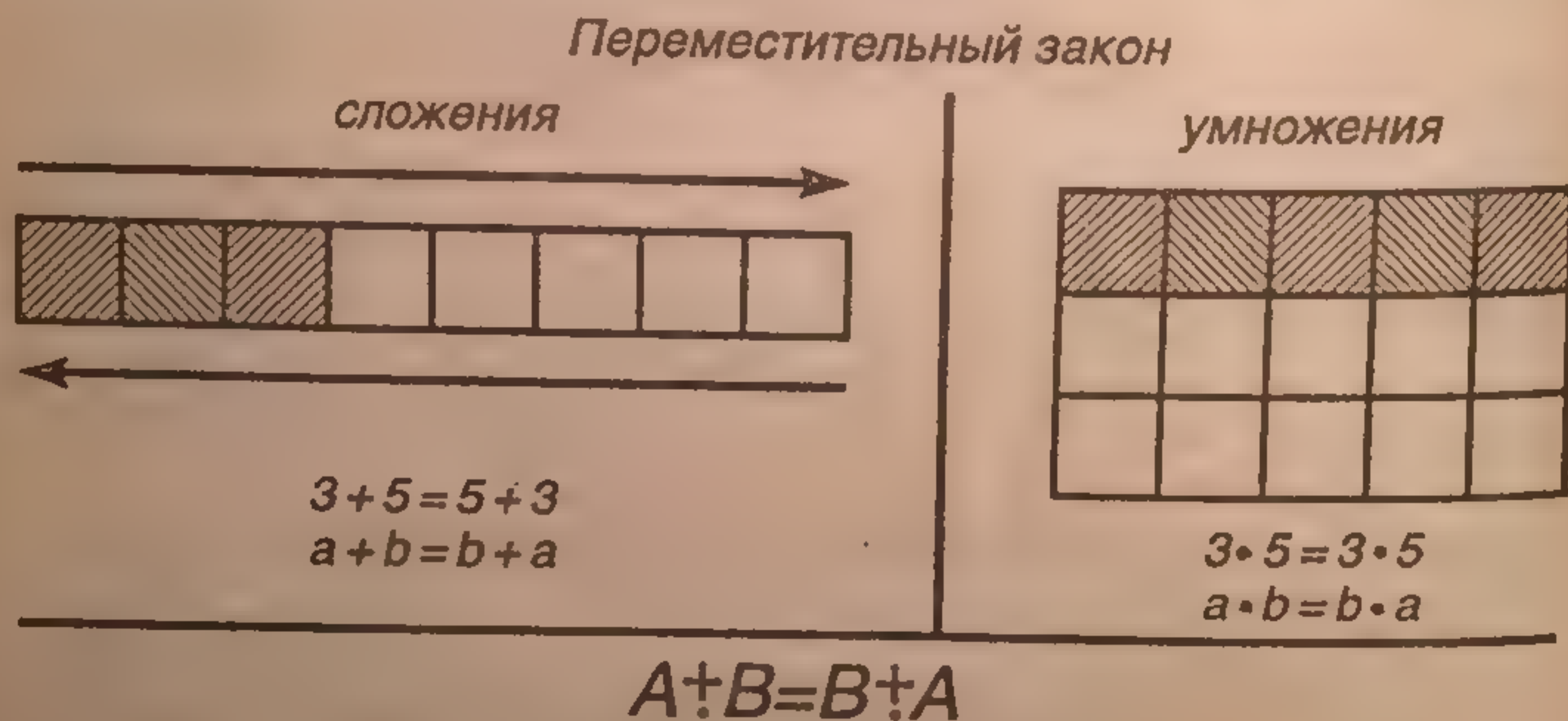


Рис. 25.

Чтобы найти, сколько всего клеток в данном ряду, мы сосчитаем их двумя способами:

Чтобы найти, сколько всего клеток в данном прямоугольнике, мы можем сосчитать их двумя способами:



1) Складываем числа слева направо: к 3 черным клеткам прибавить 5 белых, получится 8 ( $3 + 5 = 8$ ).

2) Складываем справа налево: к 5 белым клеткам прибавить 3 черных, получится 8 ( $5 + 3 = 8$ ).

1) Считаем по рядам. В каждом ряду по 5 клеток, всего таких рядов 3, поэтому имеем:  $5 \cdot 3 = 15$ .

2) Можем подсчитать число клеток по столбикам. В каждом столбике по 3 клетки, а таких столбиков 5, поэтому  $3 \cdot 5 = 15$ .

В тетрадах целесообразно записать формулировки двух законов вместе.

От перемены мест  $\frac{\text{слагаемых}}{\text{множителей}}$   $\frac{\text{сумма}}{\text{произведение}}$  не изменяется.

Переместительный закон иногда используется для ускорения вычислений.

Рассмотрим примеры:

$$15 \text{ см} + 6 \text{ м } 85 \text{ см}$$

Вместо того чтобы к меньшему числу прибавлять большее, удобнее к большему числу прибавить меньшее:

$$6 \text{ м } 85 \text{ см} + 15 \text{ см} = \\ = 700 \text{ см} = 7 \text{ м}$$

$$3 \text{ коп.} \cdot 248$$

Вместо того чтобы меньшее число умножать на большее ( $3 \cdot 248$ ), удобнее поступить наоборот:

$$248 \cdot 3 = 744$$

$$3 \text{ коп.} \cdot 248 = \\ = 7 \text{ руб. } 44 \text{ коп.}$$

Затем учащиеся могут решать примеры на применение обоих законов попеременно:

$$\square + 32 = 818 + \square \\ \square \cdot 805 = 3 \cdot \square \text{ и т.д.}$$



Полезны упражнения по проверке переместительного закона, т.е. по вычислению числовых значений обеих частей выражений при разных значениях букв.

Задание:

Какой закон сложения записан в выражении:

$$x + 12 = 12 + x$$

Проверить равенство при  $x = 3, 20, 21$  и т.д.

Какой закон умножения записан в выражении:

$$5 \cdot a = a \cdot 5$$

Проверить равенство при  $a = 4, 20, 10$  и т.д.

Мы видим, что в обоих случаях закон верен.

## 2. Изучение зависимости между компонентами и результатами действий

При систематизации знаний учащихся по определению неизвестного компонента, например (при повторении), полезно устанавливать связи типа «сложение  $\rightarrow$  умножение» и «вычитание  $\rightarrow$  деление», т.е. сравнивать попарно решения простейших уравнений.

Как находить неизвестное слагаемое?

Решим задачу:

В классе было 20 мальчиков и несколько девочек. Всего в классе было 36 учащихся. Сколько всего девочек было в классе?

Запишем кратко условие задачи:

$$20 + x = 36$$

Решение:

$$\begin{aligned} x &= 36 - 20 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Ответ. В классе было 16 девочек.

Как находить неизвестный множитель?

Решим задачу:

Купили несколько книг, по 7 коп. каждая, и всего уплатили 42 коп. Сколько было куплено книг?

Запишем кратко условие задачи:

$$7 \cdot x = 42$$

Решение:

$$\begin{aligned} x &= 42 : 7 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Ответ. Купили 6 книг.



Вывод. Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое.

Вывод. Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель.

Найденные зависимости записываются в общем виде:

$$A + B = C$$

$$A = C - B$$

$$B = C - A$$

$$A \cdot B = C$$

$$A = C : B$$

$$B = C : A$$

В этих формулах записан способ проверки сложения вычитанием.

В этих формулах записан способ проверки умножения делением.

Сравнивая оба вывода, полезно сделать обобщение: неизвестный компонент при сложении находится обратным действием: вычитанием умножением.

Как находить неизвестное уменьшаемое?

Как находить неизвестное делимое?

Рассмотрим задачу:

Рассмотрим задачу:

На обед было подано несколько огурцов. За обедом съели 8 огурцов, после обеда осталось 6 огурцов. Сколько огурцов было подано к обеду?

Учитель раздал тетради 30 учащимся, причем каждому досталось по 2 тетради. Сколько тетрадей было роздано?

Условие задачи запишется так:

Условие задачи запишется так:

$$x - 8 = 6$$

$$x : 30 = 2$$

Решение:

Решение.

$$x = 6 + 8$$

$$x = 2 \cdot 30$$

$$x = 14$$

$$x = 60$$

Ответ К обеду было подано 14 огурцов

Ответ Было роздано 60 тетрадей



Вывод. Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, надо к разности прибавить вычитаемое.

Вывод. Чтобы найти неизвестное делимое, надо частное умножить на делитель.

Оба вывода можно изобразить на буквах:

$$x - y = a$$

$$x = a + y$$

$$x : y = b$$

$$x = b \cdot y$$

Сравнивая обе задачи, можно сделать обобщение: уменьшаемое пишется на первом месте в примерах на деление. Они находятся соответственно действиями вычитания, деления, сложения, умножения.

Как находить неизвестное вычитаемое?

Составим задачу, обратную предыдущей:

На обед было подано 14 огурцов. Когда за обедом съели несколько огурцов, осталось 6. Сколько огурцов съели за обедом?

Краткая запись условия задачи:

$$14 - y = 6$$

Решение:

$$y = 14 - 6$$
$$y = 8$$

Ответ. За обедом съели 8 огурцов.

Как находить неизвестный делитель?

Составим обратную задачу:

Учитель раздал 60 тетрадей нескольким учащимся, причем каждый из них получил по 2 тетради. Сколько учащихся получили тетради?

Краткая запись условия задачи:

$$60 : y = 2$$

Решение:

$$y = 60 : 2$$
$$y = 30$$

Ответ. Тетради получили 30 учащихся.



Вывод. Чтобы найти неизвестное вычитаемое, надо из уменьшаемого вычесть разность.

Вывод. Чтобы найти неизвестный делитель, надо делимое разделить на частное.

С помощью этих зависимостей можно проверять действия вычитания и деления. Способы проверки этих действий запишем в виде формул:

$$x - y = a$$

$$x : y = b$$

$$y = x - a$$

$$y = b : x$$

Нелишне обратить внимание учащихся на то, что вычитаемое — вторые компоненты соответственно в действиях вычитания и деления и находятся они теми же действиями.

### 3. Изменение суммы и произведения в зависимости от изменения слагаемого и множителя

При изучении сложения и умножения, как известно, изучается изменение суммы в зависимости от изменения одного из слагаемых и изменение произведения в зависимости от изменения одного из множителей.

При повторении этого материала целесообразно сопоставить оба вопроса.

Рассмотрим задачи:

Имеются 5 черных и 6 белых квадратиков. Найдем сумму этих чисел:

$$5 + 6 = 11$$

Н а р и с о в а н  
прямоугольник длиной  
2 см и шириной 4 см.  
Подсчитаем, сколько  
квадратных сантиметров  
содержится в  
прямоугольнике:

$$2 \cdot 4 = 8$$



Как изменится сумма, если одно из слагаемых (например, количество белых квадратиков) увеличить на 2?

Тогда и всех квадратиков станет больше на 2.

Проверим:

$$\begin{array}{r} 5 + 6 = 11 \\ (+2) (+2) \\ \hline 5 + 8 = 13^* \end{array}$$

Второе слагаемое было равно 6, теперь оно увеличилось на 2 и стало равняться  $6 + 2 = 8$ .

Прежняя сумма была равна  $5 + 6 = 11$ , теперь сумма равна  $5 + 8 = 13$ . Сумма увеличилась также на  $13 - 11 = 2$  единицы.

\* Здесь и далее мы используем следующие условные обозначения: знаки плюс (+) или минус (—), поставленные перед числом (2) во второй строке, означают соответственно увеличение или уменьшение верхнего числа на несколько единиц; аналогично знак точка (•) или двоеточие (:), стоящие перед числом, означают соответственно увеличение или уменьшение числа в указанное число раз. (Изменение компонентов мы показываем в схемах числом в скобках, записываемым с соответствующим знаком.)

Как изменится произведение, если один из множителей (например, длину) увеличить в 3 раза?

Тогда и вся площадь увеличится в 3 раза.

Проверим:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 4 = 8 \text{ (кв. см)} \\ (\cdot 3) (\cdot 3) \\ \hline 6 \cdot 4 = 24 \text{ (кв. см)} \end{array}$$

Первый множитель (длина) был равен 2, теперь он увеличился в 3 раза и стал равняться  $2 \text{ см} \cdot 3 = 6 \text{ см}$ .

Прежнее произведение было равно  $2 \cdot 4 = 8$  (кв. см), теперь произведение равно  $6 \cdot 4 = 24$  (кв. см). Произведение увеличилось в  $24 : 8 = 3$  (раза).



Вывод. Если одно слагаемое увеличить на несколько единиц, а другое оставить без изменения, то сумма увеличится на столько же единиц.

После рассмотрения этих случаев надо разобрать противоположное изменение компонентов, причем для иллюстрации берутся те же числа.

Рассмотрим обратную задачу:

Как изменится сумма, если одно из слагаемых уменьшить на несколько единиц?

Допустим, что сначала была найдена сумма двух слагаемых: 5 черных и 8 белых — всего 13 квадратов. А затем мы уменьшим количество белых квадратов на несколько единиц; например на 2 единицы. Второе слагаемое вначале было равно 8, теперь оно уменьшилось на 2 и стало равняться  $8 - 2 = 6$ . Новая сумма составит  $5 + 6 = 11$ . Сумма уменьшилась на  $13 - 11 = 2$  единицы.

Сокращенно это изменение можно записать так:

$$\begin{array}{r} 5 + 8 = 13 \\ (-2) \quad (-2) \\ \hline 5 + 6 = 11 \end{array}$$

Вывод. Если один из множителей увеличить в несколько раз, а другой оставить без изменения, то произведение увеличится во столько же раз.

Рассмотрим обратную задачу:

Как изменится произведение, если один из множителей уменьшить в несколько раз?

Допустим, что сначала была найдена площадь прямоугольника:  $6 \cdot 4 = 24$  (кв. см). А затем мы уменьшим длину прямоугольника в 3 раза. Иначе говоря, первый множитель был равен 6 см, а теперь будет равен  $6 \text{ см} : 3 = 2 \text{ см}$ . Площадь уменьшенного прямоугольника будет равна  $2 \cdot 4 = 8$  (кв. см). Произведение уменьшилось в  $24 : 8 = 3$  (раза).

Сокращенно это изменение можно записать так:

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 4 = 24 \\ (:3) \quad (:3) \\ \hline 2 \cdot 4 = 8 \end{array}$$



Вывод. Если одно из двух слагаемых уменьшить на несколько единиц, а второе оставить без изменения, то сумма уменьшится на столько же единиц.

Вывод. Если один из двух множителей уменьшить в несколько раз, а второй множитель оставить без изменения, то произведение уменьшится во столько же раз.

Сделанные выводы можно записать так:

$$\begin{array}{rcl} A + B = C & & A \cdot B = C \\ (+x) (+x) & & (\cdot x) (\cdot x) \\ \hline (A + x) + B = C + x & & (A \cdot x) \cdot B = C \cdot x \end{array}$$

Аналогично предыдущему записываются в общем виде два последних вывода:

$$\begin{array}{rcl} A + B = C & & A \cdot B = C \\ (-x) (-x) & & (:x) (:x) \\ \hline (A - x) + B = C - x & & (A : x) \cdot B = C : x \end{array}$$

После рассмотрения этих выводов полезно выполнить упражнения по восстановлению пропущенных чисел в записях, выражающих изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов.

Вставить недостающие числа в следующих кратких записях изменения суммы и произведения и пояснить, какие изменения произошли с суммой и произведением:



$$100 + 20 = 120$$

$$(+ \square) (+ \square)$$

$$\square + 25 = 125$$

$$\square + 37 = 87$$

$$(- 5) (- \square)$$

$$\square + 37 = \square$$

$$10 \cdot 40 = 400$$

$$(\cdot \square) (\cdot \square)$$

$$\square \cdot 80 = 800$$

$$300 \cdot 2 = 600$$

$$(: 5) (: \square)$$

$$\square \cdot 2 = \square$$

После того как учащиеся усвоят решение подобных упражнений, можно перейти к обобщенным упражнениям, когда даны только изменения некоторых компонентов, а учащиеся должны найти соответствующие изменения остальных членов; кроме того, они должны уметь проиллюстрировать данную зависимость на каком-либо примере или задаче.

Изменение суммы			Изменение произведения		
первое слагаемое	второе слагаемое	сумма	первый множитель	второй множитель	произведение
+ 20	- 30	$\square$ $\square$ + 40 - 30	$\cdot 2$	$: 3$	$\square$ $\square$ $\cdot 12$ $: 4$
$\square$	$\square$		$\square$	$\square$	

Составить задачу к последней строке таблицы:

В первый день два звена собрали 100 кг макулатуры. На другой день второе звено собрало столько же, сколько в первый день. Оба звена вместе собрали на 30 кг меньше, чем в первый день.

Составить задачу к последней строке таблицы:

Площадь прямоугольника равна 100 кв. см. Ширину прямоугольника не изменяли, а длину изменили в несколько раз. Известно, что после этого площадь прямоугольника уменьшилась в 4 раза.



Что можно сказать о работе первого звена во второй день? Больше или меньше собрало оно во второй день, чем в первый день?

Как изменили длину прямоугольника? Увеличили или уменьшили ее? Во сколько раз?

Рассказать на числовом примере.

Решение  
значения  
дачи де  
с зависи  
ми; реше  
нием  
во врат

В псих  
но с по  
мысли

В дв  
Сколько

Когда

выраж

кратко

котор

Уча

задач

$+ 6 \cdot 3$

Если

письк

гичну

мы со

пере

На

связ

жени



## Глава VII

# ОБУЧЕНИЕ СОСТАВЛЕНИЮ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

### 1. О месте задач в курсе математики начальной школы

Решение задач в начальной школе имеет центральное значение для развития мышления учащихся: через задачи дети знакомятся с различными сторонами жизни, с зависимостями между изменяющимися величинами; решение задач связано с рассуждениями, с построением цепи силлогизмов. Задача — это основной вход во врата логики и диалектики.

В психологическом отношении решение задач связано с постоянными переходами от символической формы мысли к словесной. Рассмотрим задачу:

В двух бидонах было по 10 л молока, а в трех — по 5 л. Сколько литров молока было во всех бидонах?

Когда ученик записывает результат решения в виде выражения  $2 \cdot 10 + 3 \cdot 5$ , он учится изображать предельно кратко, лаконично и свернуто три умозаключения, из которых состоит решение соответствующей задачи.

Учащимся можно предложить составить аналогичную задачу по сходной формуле и той же структуре:  $4 \cdot 5 + 6 \cdot 3$ .

Если первое упражнение мы изобразим условно записью «задача  $\rightarrow$  выражение», составляя задачу, аналогичную решенной (тоже на сумму двух произведений), мы создаем связи, характеризуемые противоположным переходом «задача  $\leftarrow$  выражение».

Наложение этих двух связей создает двусторонние связи, которые можно изобразить так: «задача  $\rightleftarrows$  выражение».



Таким образом, обучение задачам понимаемое как обучение логике, не должно рассматриваться в обычных узких рамках, как обучение лишь решению задач, а должно рассматриваться шире, как обучение лишь решению и составлению задач.

В новых программах по математике правильно взят курс на алгебраизацию арифметики, на необходимость ознакомления учащихся с наиболее общими приемами решения, которые могут быть использованы при работе над задачами разного смыслового сюжетного и логического оттенков.

Одна из целей обучения решению задач — это постепенное освоение во II — III классах алгебраических способов решения задач, т.е. решения с помощью составления уравнений.

При работе над задачами выгодно пользоваться приемом, когда в серии задач последующая отличается от предыдущей лишь каким-либо одним элементом (одним изменившимся значением величины, одним знаком и т.д.)\*

В этом случае переход от задачи к задаче существенно облегчается, он совершается почти незаметно, и информация, полученная при решении предыдущей задачи, облегчает решение последующих задач.

Особенно помогает этот прием слабым или медлительным учащимся.

Решим задачу:

Турист проехал на мотоцикле 3 ч по 40 км в час и еще плыл пароходом 50 км. Сколько всего километров проехал турист?

Решение

$$40 \cdot 3 + 50 = 170 \text{ (км)}$$

В дальнейшем задачи, решаемые устно, могут быть предложены в такой последовательности

---

\* Этот прием применим на начальном этапе работы над понятиями или преобразованиями как в элементарной так и в высшей математике



(I) $40 \cdot 3 + 50 =$	$40$	$:$	$3$	$+$	$50$	$=$
(II) $40 \cdot 6 + 50 =$						
(III) $40 \cdot 6 + 20 =$	$30$	$:$	$6$	$+$	$20$	$=$
(IV) $30 \cdot 6 + 20 =$						
(V) $30 \cdot 6 - 20 =$						
(VI) $30 : 6 + 20 =$						

условие задачи (II) формулируется устно:

Турист проехал на мотоцикле 6 ч по 40 км в час и еще пароходом 50 км. Сколько всего километров проехал турист?

Задача (III).

Турист проехал на мотоцикле 6 ч по 40 км и еще пароходом 20 км. Сколько всего километров проехал турист?

Устная формулировка такой серии задач поэтапно подводит даже слабого ученика к пониманию того, как изменение одного лишь элемента решенной задачи (в выражении) приводит к изменению задачи, к возникновению новой задачи.

Обычно после задачи вида (I) следует задача вида (V) или (VI), которые отличаются от (I) почти по всем параметрам.

Для учащихся такой резкий переход оказывается часто непреодолимым барьером.

## 2. Методика составления задачи, обратной к задаче в несколько действий

Прежде чем рассмотреть методику составления обратной задачи, решим задачу в 3 действия:

Для детского дома купили 5 платьев по 8 руб. и 4 пальто по 13 руб. Сколько стоит вся покупка?

Решение:

1)  $13 \cdot 4 = 52$  (руб.)

2)  $8 \cdot 5 = 40$  (руб.)

3)  $52 + 40 = 92$  (руб.)

После решения задачи проводится примерно такая беседа:



Учитель. Сколько чисел было дано в условии решенной задачи? Какие это были числа? Выпишите их.

Ученик. В задаче были даны следующие числа: 5 пл., 8 руб., 4 пал., 13 руб.

Учитель. В условии были даны четыре числа. Пятое число — 92 руб., найдено при ее решении — это ответ к задаче.

Запишем ответ в клетке:

8 пл., 8 руб., 4 пал., 13 руб., 92 руб.

Дальше учитель поясняет процесс составления обратной задачи.

Учитель. Если мы в условии задачи вместо любого из четырех данных чисел поставим 92 руб., то получим новую задачу, обратную решенной.

Например, сделаем искомым числом 5 платьев, а число 92 руб. сделаем известным числом и введем в условие обратной задачи.

Схема обратной задачи запишется так:

5 пл., 8 руб., 4 пал., 13 руб., 92 руб.

Каким будет вопрос обратной задачи?

Ученик. Сколько платьев было куплено?

Учитель. Составьте условие обратной задачи. В условии задачи расскажите о 4 оставшихся числах. Читайте условие новой задачи, перебирая числа справа налево.

Ученик. Для детского дома купили на 92 руб. платья и пальто. Цена платья 8 руб. Купили 4 пальто по 13 руб. каждое. Сколько было куплено платьев?

Учитель. Условия обратной задачи удобнее сформулировать так:

Для детского дома купили 4 пальто по 13 руб. и несколько одинаковых платьев по 8 руб. Всего израсходовали на покупку 92 руб. Сколько купили платьев?

Учащиеся решают эту задачу:

1)  $13 \cdot 4 = 52$  (руб.)

2)  $92 - 52 = 40$  (руб.)

3)  $40 : 8 = 5$  (пл.)

После решения обратной задачи полезно сравнить условия обеих задач, сравнить способы решения их (решения прямой и обратной задач расположить рядом)



## прямая задача

5 пл., 9 руб.,  
4 пал., 13 руб.,  $\square$

Решение:

- 1)  $13 \cdot 4 = 52$  (руб.)
- 2)  $8 \cdot 5 = 40$  (руб.)
- 3)  $52 + 40 = 92$  (руб.)

Запишем решение равенством двух выражений:

$$13 \cdot 4 + 8 \cdot 5 = 92$$

## Обратная задача

$\square$ , 8 руб., 4 пал.,  
13 руб., 92 руб.

Решение:

- 1)  $13 \cdot 4 = 52$  (руб.)
- 2)  $92 - 52 = 40$  (руб.)
- 3)  $40 : 8 = 5$  (пл.)

Запишем решение равенством двух выражений:

$$(92 - 13 \cdot 4) : 8 = 5 \text{ (пл.)}^*$$

Учитель. Чем отличается прямая задача от обратной? Какие числа являются искомыми в прямой и обратной задачах?

Ученик. В прямой задаче искомым было число 92 руб., в обратной задаче — число 5 платьев.

Учитель. Какие числа входят в условия обеих задач?

Ученик. В условия прямой и обратной задач входят числа — 8 руб., 4 пальто, 13 руб.

Учитель. Сравним решения прямой и обратной задач. Что общего в решениях этих задач?

Ученик. Каждая задача решается тремя действиями. Количество действий у обеих задач одинаково.

Учитель. Какими действиями решается каждая задача?

Ученик. Прямая задача решена двумя умножениями и сложением. Решение обратной задачи состоит из умножения, вычитания и деления.

Учитель. Значит, при решении обратной задачи появились два новых действия:

второе действие — вычитание:  $92 - 52 = 40$  (руб.);

третье действие — деление:  $40 : 8 = 5$  (пл.)

\* Обратим внимание на следующее обстоятельство. Формула обратной задачи  $(92 - 13 \cdot 4) : 8$  доставляет учителю удобный случай разъяснить смысл порядка действий и скобок.



Как мы находили число 40 руб. при решении прямой задачи?

Ученик. В прямой задаче мы знали цену одного платья. Чтобы найти стоимость 5 платьев, мы 8 руб. умножали на 5.

Учитель. А как мы находили в обратной задаче число 40 руб., т.е. стоимость всех платьев?

Ученик. В обратной задаче известна стоимость всей покупки (92 руб.). Чтобы найти стоимость платьев, мы из 92 руб. вычитаем 52 руб, получаем 40 руб.

Учитель. Обратите внимание на решение первой и второй задач. Какие действия в них одинаковы?

Ученик. Первые действия в обеих задачах одинаковы. Стоимость 4 пальто находят умножением:

$$13 \cdot 4 = 52 \text{ (руб.)}$$

Чтобы найти стоимость, надо цену товара умножить на количество.

Учитель. Во втором действии обратной задачи определяется стоимость платьев:

$$92 - 52 = 40 \text{ (руб.)}$$

С каким действием прямой задачи связано это действие?

Ученик. Оно связано с третьим действием прямой задачи. Если в прямой задаче находится сумма  $52 + 40 = 92$  (руб.), то в обратной задаче находится одно из слагаемых по сумме и известному другому слагаемому:

$$92 - 52 = 40 \text{ (руб.)}$$

Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое.

Учитель. Рассмотрим третье действие обратной задачи. С каким действием прямой задачи оно связано?

Ученик. Оно связано со вторым действием прямой задачи. Если в прямой задаче находится произведение  $8 \cdot 5 = 40$  (руб.), то в обратной задаче находится множитель по известным произведению и другому множителю:  $40 : 8 = 5$  (пл.).

Учитель. В прямой задаче вторым действием находится стоимость всех платьев по цене и количеству.



купленного товара. Какая величина определяется в обратной задаче?

Ученик. В обратной задаче находится количество купленного товара. Для этого стоимость делят на цену.

Подобные беседы проводятся обычно не полностью, а частично для выявления отдельных зависимостей между прямой и обратной задачами.

При составлении обратной задачи учащиеся нередко пытаются включить в условие результаты промежуточных действий (например, в рассматриваемом примере они могут попытаться использовать числа: 52 руб., 40 руб.). Это неверно: в условии обратной задачи должен находиться лишь ответ прямой задачи, т.е. результат третьего действия (92 руб.).

Уместно иногда сопоставить по действиям решения прямой и обратной задач, указать их попарно одним и тем же цветом, подчеркиванием, рамкой и другими приемами.

Прямая задача (1)

Обратная задача (2)

1)  $13 \cdot 4 = 52$

1)  $13 \cdot 4 = 52$

2)  $8 \cdot 5 = 40$

2)  $92 - 52 = 40$

3)  $52 + 40 = 92$

3)  $40 : 8 = 5$

Аналогично составляются и три другие обратные задачи, схемы которых такие:

(III) 5 пл., 8 руб., 4 пал., 13 руб., 92 руб.

(IV) 5 пл., 8 руб., 4 пал., 13 руб., 92 руб.

(V) 5 пл., 8 руб., 4 пал., 13 руб., 92 руб.

Как показывает наша практика, составлением обратных задач могут заниматься уже первоклассники (в случае задач в одно действие); во II и III классах учащиеся с большим интересом преобразуют задачи в 2 — 3 действия в обратные им и успешно решают их.

Нормой можно считать, когда учащиеся I, II, III классов обучаются преобразованию в обратные задачи соответственно задач в 1, 2, 3 действия.



Связи между прямыми и обратными задачами иногда удобно выражать едиными графическими схемами. На рисунке 26 показаны графические схемы решения прямой задачи (1), искомое число обозначено прямоугольником (сплошные стрелки); в обратной задаче искомое число обозначено треугольником (пунктирные стрелки).

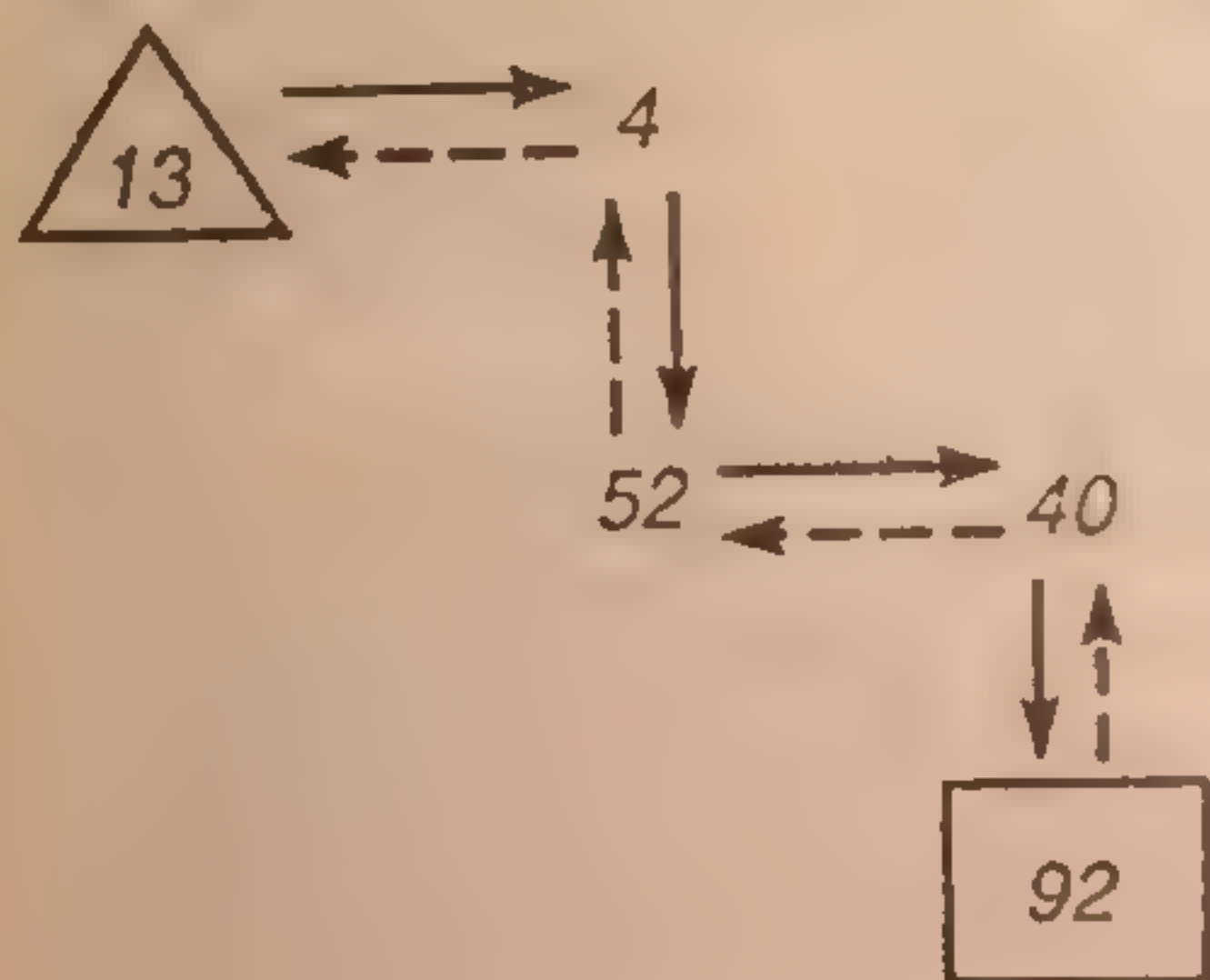


Рис 26.

Разумеется, условие обратной задачи записывать нет смысла, достаточно записать лишь соответствующую строку — схему из чисел, входящих в ее условие. Учащиеся, видя число без рамки, включают его в условие задачи; число в рамке не должно быть включено в условие, оно должно быть скрыто, сделано неизвестным; для числа, находящегося в рамке, учащийся формулирует соответствующий вопрос задачи.

Таким образом, числа, записанные в схеме, становятся опорными пунктами для формирования предложений, из которых состоит как условие задачи, так и решение.

При записи решения обратной задачи нет смысла писать вопросы, достаточно написать лишь действия.

Чтобы добиться разнообразия упражнений, полезно иногда предлагать учащимся изобразить лишь последовательность действий знаками, не записывая самих чисел. Например, для указанной выше обратной задачи, когда она решается устно в классе, они напишут так:

- 1) •
- 2) —
- 3) :

В других случаях можно потребовать, чтобы записывались лишь результаты действий, без знаков действий, и запись будет выглядеть для той же задачи так:

- 1) 52 руб.; 2) 40 руб.; 3) 5 платьев.

Подобные упражнения облегчают работу памяти, так как фиксируются отдельные узловые моменты мыслительной деятельности (действия или результаты действий)



### 3. Задачи в три действия

Скажем несколько слов о роли названий задачи при обучении. Никакое познание не может быть экономным и успешным, если не наведен определенный порядок в исследуемых объектах, не осуществлена классификация их. Так и в случае изучения задач.

Наша практика показывает, что на первых порах работы над разновидностями задач полезно сообщить учащимся названия задач, даже в случае обычных, типовых задач. Последние должны быть выражены понятными и краткими. Впоследствии эти названия используются в меньшей мере, и потребность в них исчезнет.

Если же с самого начала работы над задачами совершенно не пользоваться никаким принципом в отборе, то случайный отбор задач, подлежащих решению, не может содействовать развитию мышления лучшим образом.

Рассмотрим разновидности задач в три действия, у которых последнее действие совершается над двумя однородными именованными числами, являющимися в свою очередь произведениями.

Даны цены двух сортов ткани (20 руб. и 10 руб.) метраж их (6 м и 4 м) и стоимость  $20 \cdot 6 = 120$  (руб.)  
 $10 \cdot 4 = 40$  (руб.)

Составим первую прямую задачу.

1 а). Купили 6 м сукна по 20 руб. за метр и 4 м шерсти по 10 руб. за метр. Сколько стоит вся покупка?

Решение:

$$1) 20 \cdot 6 = 120 \text{ (руб.)};$$

$$2) 10 \cdot 4 = 40 \text{ (руб.)};$$

$$3) 120 + 40 = 160 \text{ (руб.)}$$

Решение можно записать в виде выражения.

$$20 \cdot 6 + 10 \cdot 4 = ?$$

или

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square =$$

На буквах:  $a \cdot x + b \cdot y =$



Такие задачи можно назвать задачами на сумму двух произведений.

Существуют следующие задачи, обратные рассмотренной.

I б) Искомое число — цена 1 м сукна (20 руб.).

Куплено 4 м шерсти по 10 руб. за метр и 6 м сукна, всего на сумму 160 руб. Сколько стоит 1 м сукна?

I в) Искомое число — количество метров (6 м).

Куплено несколько метров сукна по 20 руб за метр, 4 м шерсти по 10 руб., всего на сумму 160 руб. Сколько метров сукна было куплено?

Две другие обратные задачи I г, I д по структуре подобны задачам I б и I в, поэтому мы их не рассматриваем

В рассмотренной нами прямой задаче последним (третьим) действием определялась сумма двух именованных чисел.

Эти числа можно сравнить вычитанием (или делением).

Так мы получаем еще две группы задач.

II а) Формула второй прямой задачи такова:

$$\square \cdot \square - \square \cdot \square =$$
$$A \cdot x - B \cdot y =$$

Эти задачи называются задачами на разность двух произведений.

Куплено 6 м сукна по 20 руб. за метр и 4 м шерсти по 10 руб. На сколько больше заплатили за сукно, чем за шерсть?

Решение.

1)  $20 \cdot 6 = 120$  (руб.);

2)  $10 \cdot 4 = 40$  (руб.);

3)  $120 - 40 = 80$  (руб.).

Обратные задачи можно составить так:

Записать схему обратной задачи:

20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 80 руб.

Схемы обратных задач будут соответственно такими:

II б) 20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 80 руб.



II в) 20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 80 руб.

II г) 20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 80 руб.

II д) 20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 80 руб.

Для произведения можно сравнить делением (кратное сравнение). Так получаем третью группу задач.

III а) Формула третьей прямой задачи:

$$(\square \cdot \square) : (\square \cdot \square) =$$

$$(A \cdot x) : (B \cdot y) =$$

Назовем такие задачи задачами на частное двух произведений.

Куплено 6 м сукна по 20 руб. за метр и 4 м шерсти по 10 руб. Во сколько раз за сукно заплатили больше, чем за шерсть?

Решение:

1)  $20 \text{ руб.} \cdot 6 = 120 \text{ руб.};$

2)  $10 \text{ руб.} \cdot 4 = 40 \text{ руб.};$

3)  $120 \text{ руб.} : 40 \text{ руб.} = 3 \text{ (раза).}$

Запишем схему прямой задачи (III а):

20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 3 раза

Схемы обратных задач будут соответственно следующие:

III б) 20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 3 раза

III в) 20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 3 раза

III г) 20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 3 раза

III д) 20 руб., 6 м, 10 руб., 4 м, 3 раза

В рассмотренных выше задачах мы находили сумму, разность и частное двух произведений.

Аналогично можно поступать с задачами, где надо рассматривать два частных



Тогда соответственно формулы других трех прямых задач будут такими:

IV а) На сумму двух частных:  $\square : \square + \square : \square =$

$$A : x + B : y =$$

V а) На разность двух частных:  $\square : \square - \square : \square =$

$$A : x - B : y =$$

VI а) На частное двух частных:  $(\square : \square) : (\square : \square) =$

$$(A : x) : (B : y) =$$

Приведем соответствующие примеры.

IV а) Турист проехал паромом 60 км, затем прошел пешком 24 км. Паромом проезжал в час по 30 км, а пешком проходил по 4 км в час. Сколько часов турист был в пути?

Решение:

1)  $60 : 30 = 2$  (ч);

2)  $24 : 4 = 6$  (ч);

3)  $2 + 6 = 8$  (ч).

V а) Турист проехал паромом 60 км, затем прошел пешком 24 км. Паромом проезжал в час по 30 км, а пешком проходил в час 4 км. На сколько часов дольше он шел пешком, чем ехал паромом?

Решение:

1)  $60 : 30 = 2$  (ч);

2)  $24 : 4 = 6$  (ч);

3)  $6 - 2 = 4$  (ч).

VI а) Турист проехал паромом 60 км, затем прошел пешком 24 км. Паромом проезжал в час по 30 км, а пешком проходил по 4 км в час. Во сколько раз больше времени турист шел пешком, чем ехал паромом?

Решение:

1)  $60 : 30 = 2$  (ч);

2)  $24 : 4 = 6$  (ч);

3)  $6 : 2 = 3$  (раза).

Каждой из этих двух задач можно составить по 4 обратные задачи. Поэтому всего нами рассмотрено  $6 \cdot 5 = 30$  различных видов обычных арифметических задач в три действия.

Однако эти 30 задач образуют основную группу нетиповых задач в три действия, объединенных логической общностью; они составляют значительную часть традиционного задачного материала для II и III классов



Так как многих задач из этих видов нет в действующих задачниках, то, только составляя и решая обратные задачи, можно получить большое разнообразие их.

При работе над этими задачами полезно предлагать учащимся преобразовывать задачу не только в обратную ей, но и переделывать одну прямую задачу в другую прямую (например, IIa, IIIa и т.п.). В этом смысле три первые задачи (I, II, III) и последние три задачи (IV, V, VI) составляют как бы две подгруппы родственных задач, образующих одну группу.

На основании разобранных типов задач можно предлагать учащимся задания по самостоятельному составлению задач:

1. Составить задачу на разность двух произведений и обратную ей, решить эти задачи.

2. Составить задачу, решаемую так:

$$900 : 3 + 600 : 25 =$$

Как называется вид этой задачи?

3. Составить и решить задачу вида:

$$\square \cdot \square - \square \square$$

Как называется данное выражение?

4. Составить и решить задачу по выражению:

$$(A \cdot x) : (B \cdot y)$$

Иногда бывает полезным предложить учащимся задачу без вопроса, с тем чтобы они сформулировали его сами.

Такие задания встречаются в школьных задачниках. Мы же акцентируем внимание на необходимости постановки всех возможных вопросов к общему условию, для того чтобы они уяснили принцип вариации, который позволяет получить группу задач.

Например, задание должно выглядеть так:  
Турист проехал паромом 60 км, затем прошел пешком 24 км. Паромом он проезжал в час по 30 км, а пешком проходил в час по 4 км.

Поставить три разных вопроса и решить задачи



(Можно было бы и указать, относительно чего поставить вопросы: поставить три разных вопроса относительно времени, затраченного туристом.)

Учащиеся придумывают три вопроса:

- 1) Сколько часов был турист в пути?
- 2) На сколько часов больше турист шел пешком, чем ехал паромом?
- 3) Во сколько раз дольше турист шел пешком, чем ехал паромом?\*

Решения этих задач имеют одинаковые первые два действия (и эти действия логично записать лишь один раз), отличаясь только третьим действием.

Решения всех задач можно записать рядом:

а)  $60 : 30 = 2$  (ч);

б)  $24 : 4 = 6$  (ч)

1) $6 + 2 = 8$ (ч)	2) $6 - 2 = 4$ (ч)	3) $6 : 2 = 3$ (раза)
--------------------	--------------------	-----------------------

Выполнив такое задание, учащиеся убеждаются, что эти задачи имеют общие элементы и решение их зависит от вопроса и что они составляют некоторую целостную группу взаимосвязанных задач.

Большую группу арифметических задач в два действия можно получить на основе упрощения (ограничения) рассмотренных выше задач в три действия.

Задача на нахождение суммы двух произведений имеет вид:

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square =$$

$$a \cdot x + b \cdot y =$$

Если здесь одно умножение опустить, дав вместо него готовое произведение ( $a \cdot x = k$ ;  $b \cdot y = c$ ), то мы получим задачу в два действия, которой соответствуют выражения:

1 а)  $k + b \cdot y =$

2 а)  $a \cdot x + c =$

\* Учитель должен так подобрать числовые данные, чтобы первое произведение было больше второго или было кратно второму произведению (для возможности постановки третьего вопроса).



условие прямой задачи:

1 а) Купили сукна на 120 руб. и 4 м шерсти по 10 руб. за метр. Сколько стоит вся покупка?

Решение:

1)  $10 \cdot 4 = 40$  (руб.);

2)  $120 + 40 = 160$  (руб.).

Составим обратные задачи.

1 б) Схема обратной задачи:

120 руб., 4 м, 10 руб., 160 руб.

Купили 4 м шерсти по 10 руб. и сукна. Всего на покупку израсходовали 160 руб. На сколько рублей купили сукна?

Решение:

1)  $10 \cdot 4 = 40$  (руб.);

2)  $160 - 40 = 120$  (руб.).

Остальные обратные задачи имеют схемы:

1 в) 120 руб., 160 руб., 4 м, 10 руб.

1 г) 120 руб., 160 руб., 4 м, 10 руб.

Далее, задача на разность двух произведений имела выражение:

$$a \cdot x - b \cdot y,$$

а соответствующие ей прямые задачи в два действия будут иметь выражения:

3 а)  $k - b \cdot y$

3 а)  $a \cdot x - c$

3 а) Купили сукна на 120 руб. Кроме того, куплено 4 м шерсти по 10 руб. за метр. На сколько рублей больше купили сукна, чем шерсти?

Решение:

1)  $10 \cdot 4 = 40$  (руб.);

2)  $120 - 40 = 80$  (руб.).

3 а) Купили 6 м сукна по 20 руб. за метр. Кроме того, купили шерсти на 40 руб. На сколько рублей больше израсходовали на покупку сукна, чем на шерсть?



Решение:

1)  $20 \cdot 6 = 120$  (руб.);

2)  $120 - 40 = 80$  (руб.).

Аналогично рассматриваются задачи (5а), (6а) и им обратные.

Формулы этих задач следующие:

(5а)  $k : (b \cdot y)$

(6а)  $(a \cdot x) : c$

5 а) Купили сукна на 120 руб. Еще купили 4 м шерсти по 10 руб. за метр. Во сколько раз больше израсходовали денег на покупку сукна, чем на шерсть?

Решение:

1)  $10 \cdot 4 = 40$  (руб.);

2)  $120 : 40 = 3$  (раза).

6 а) Купили 6 м сукна по 20 руб. за метр и шерсти на 40 руб. Во сколько раз больше израсходовали денег на покупку сукна, чем на покупку шерсти?

Решение:

1)  $20 \cdot 6 = 120$  (руб.);

2)  $120 : 40 = 3$  (раза).

#### 4. Задачи на приведение к единице

Во II классе при изучении умножения и деления рассматриваются задачи на прямое и обратное приведение к единице.

Поскольку по описываемой нами системе умножение и деление изучаются одновременно, становится возможным и необходимым одновременное изучение двух видов задач на приведение к единице.

Другая существенная особенность нашей методики заключается в том, что работу над задачей мы начинаем не с анализа ее условия, а с составления этого условия.

Учитель. Мы составим сейчас задачу о работе швеи. Кто скажет, сколько метров полотна идет на одно платье? (Выясняется, что на одно платье идет в среднем 4 м полотна.) Пусть первой швеей было сшито 5 платьев. Сколько метров полотна нужно для этого? Как вы это нашли?

Ученик. Для этого нужно 20 м: по 4 м взять 5 раз, получится 20 м.



учитель. Пусть вторая швея сшила 3 платья, и на это потребовалось  $4 \cdot 3 = 12$  (м) полотна.

На доске учитель записывает две строчки:

первая швея — 5 пл., 20 м

вторая швея — 3 пл., 12 м

Далее учитель указывает, что по такой записи можно разбирать задачу в двух планах: если по строкам указываются швеи (первая швея, вторая швея), то по столбцам указывается число платьев и число метров (одновременные числа записываются одно под другим).

Затем учитель поясняет, что с помощью написанных выше четырех чисел можно составить новую задачу, для чего сделаем неизвестным одно из чисел правого столбика (заменим число 12 м квадратиком).

Учащиеся составляют новую задачу по следующей схеме:

первая швея — 5 пл., 20 м

вторая швея — 3 пл.,  $\square$ .

Решение:

1)  $20 : 5 = 4$  (м);

2)  $4 \cdot 3 = 12$  (м).

Решение составленной таким образом задачи выполняется учащимися легче, чем решение готовой задачи, так как структура ее им ясна по предшествовавшему процессу ее составления, а именно при составлении задачи они выполняли умножение ( $4 \cdot 5 = 20$  (м)), а для решения ее теперь остается догадаться об основном действии — делении ( $20 : 5 = 4$  (м)), учащимся известно второе действие.

Затем составляется обратная задача, для этого в схеме прямой задачи число 12 м вписывается на свое место, а число 3 платья, стоящее в том же ряду, делается неизвестным.

Новая задача решается коллективно. На доске появляются записи условия и решения двух взаимно обратных задач.



### Прямая задача

Первая швея — 5 пл.,  
20 м  
Вторая швея — 3 пл., ☐

Решение:

- 1)  $20 : 5 = 4 \text{ (м)}$ ;
- 2)  $4 \cdot 3 = 12 \text{ (м)}$ .

### Обратная задача

Первая швея — 5 пл.,  
20 м  
Вторая швея — ☐, 12 м

Решение:

- 1)  $20 : 5 = 4 \text{ (м)}$ ;
- 2)  $12 : 4 = 3 \text{ (пл.)}$ .

Далее следует беседа:

Учитель. Которое из этих двух действий нужно считать основным?

Ученик. Основным является первое действие.

Учитель. Почему?

Ученик. Потому что в первом действии мы находим, сколько метров пошло на одно платье, т.е. 4 м. А дальше решать уже легко.

Учитель. Правильно. Такие задачи поэтому называются задачами на приведение к единице. Запомните это название.

Затем проводится сравнение условий прямой и обратной задач и процесс их решения.

Учитель. Прочитайте условия обеих задач. Расскажите их решения. Сколькими действиями решается прямая задача? Обратная задача?

Ученик. Прямая задача решена двумя действиями, обратная задача тоже двумя действиями.

Учитель. Какое действие в этих задачах одинаково? Что мы находим этим действием?

Ученик. Первое действие в обеих задачах одинаково; мы им находим, сколько метров ткани пошло на одно платье:

$$20 : 5 = 4 \text{ (м)}.$$

Учитель. Что мы находим во втором действии в прямой задаче? В обратной задаче? Укажите взаимно обратные действия



ученик. Вторым действием в прямой задаче находим, сколько пошло ткани на 3 платья:  $4 \cdot 3 = 12$  (м). В обратной задаче находим, наоборот, сколько сшито платьев из 12 м ( $12 : 4 = 3$  (пл.)). Эти два действия будут взаимно обратные.

учитель. Прямая задача решена делением и умножением, а обратная задача — двумя действиями деления.

Вторую пару задач на приведение к единице можно решить в другом порядке.

Сначала рассматривается задача:

На 36 коп. купили 9 одинаковых тетрадей. Сколько таких тетрадей можно купить на 24 коп.?

Кратко записывается условие задачи:

36 коп. — 9 т.

24 коп. —  $\square$  т.

Решение:

1) Сколько стоит одна тетрадь?

$$36 : 9 = 4 \text{ (коп.)}$$

2) Сколько тетрадей можно купить на 24 коп.?

$$24 : 4 = 6 \text{ (т.)}$$

Найденный ответ — 6 тетрадей — записывается внутри клетки. Затем предлагается учащимся по данным числам составить новую задачу, для этого одно из чисел левого столбца сделать неизвестным. Пусть составлена следующая схема:

36 коп. — 9 т.

$\square$  коп. — 6 т.

Учащиеся формулируют условие новой задачи: 36 коп. стоят 9 тетрадей. Сколько стоят 6 таких тетрадей?

Решение:



$$1) 36 : 9 = 4 \text{ (коп.)};$$

$$2) 4 \cdot 6 = 24 \text{ (коп.)}.$$

Иногда могут быть устно решены все четыре задачи, составленные по одному сюжету.

Например, к последней паре задач могут быть добавлены и решены еще две задачи по схеме:

$$\square \quad \text{— 9 т.}$$

$$24 \text{ коп. — 6 т.}$$

Решение:

$$1) 24 \text{ коп.} : 6 = 4 \text{ (коп.)};$$

$$2) 4 \text{ коп.} \cdot 9 = 36 \text{ (коп.)}.$$

$$36 \text{ коп. — } \square \text{ т.}$$

$$24 \text{ коп. — 6 т}$$

Решение:

$$24 : 6 = 4 \text{ (коп.)};$$

$$36 : 4 = 9 \text{ (т.)}.$$

При работе над задачами на приведение к единице удобно иногда озаглавить столбцы, используя обобщенные названия.

I способ

копейки	тетради
$\square$	9
24	6

II способ

стоимость (в коп.)	количество (в шт.)
$\square$	9
24	6

Раннее пользование такими записями облегчает в последующем решение задач, связанных с прямо пропорциональной зависимостью (на пропорциональное деление, на нахождение части и числа по его части и др.).

Правильное распределение чисел в такой таблице уже есть извлечение части информации, заключенной в задаче, начало «раскодирования» ее условия, что определяет успешное завершение решения.

В практике обучения решению задач учителя обычно обходятся разъяснениями посредством логических и математических понятий.



Так, даже если учитель ни словом не упомянул о том, что в упорядоченной записи значений двух величин:

36 коп. — 9 т.,

24 коп. — 6 т.

существуют определенные соотношения между числами, расположенными в рядах, учащийся все равно самостоятельно обнаруживает (быть может, четко не осознавая этого), например, то, что числа верхней строки больше соответствующих чисел нижней строки, или числа левого столбца кратны соответствующим числам правого столбца.

Отметим, что при характеристике преобразования задач полезно использовать такие понятия, как цена, количество товара и стоимость; скорость, время и расстояние и т.п.

Объяснение можно вести так:

В прямой задаче мы нашли стоимость 9 тетрадей, для этого цену тетради (4 коп.) умножили на количество тетрадей.

В обратной задаче мы нашли количество тетрадей (9 штук), для этого стоимость тетрадей (36 коп.) разделили на цену (4 коп.).

Задание по перестройке прямой задачи и решению пары взаимно обратных задач можно предлагать и при проведении самостоятельных или контрольных работ к концу изучения данной темы.

## 5. Задачи на движение

Оба вида задач на движение — в одном и противоположных направлениях — целесообразно решать одновременно.

Начинать надо с простейших задач.

В условии одной задачи мы даем два направления движения: над чертой пишем одно направление, а под чертой — другое, тем самым мы разбиваем задачу на две задачи. Например:

Расстояние между точками А и В 140 м.



Из А и В навстречу друг другу едут велосипедисты со скоростями 8 м в сек и 6 м в сек сближаются разъезжаются в разные стороны.

Внимательно обсуждаем ответы на следующие вопросы:

- 1) На сколько метров они сближаются удаляются за 1 сек?
- 2) Какое расстояние между ними через 1 сек?
- 3) » » » » через 3 сек?
- 4) Написать формулу для вычисления расстояния между велосипедистами через 10 сек.
- 5) — » — через x сек.

После решения этой пары задач процессы решения сопоставляются, сравниваются:

1. Ответ на первый вопрос в том и другом случае находится сложением:

$$4 + 3 = 12 \text{ (м)}.$$

Однако в первом случае велосипедисты сближаются за 1 сек на 7 м, а во втором случае удаляются на 7 м.

2. Расстояние между ними через секунду в первом случае уменьшится на 7 м:

$$140 - 7 = 133 \text{ (м)}.$$

Во втором случае расстояние увеличивается на 7 м:

$$140 + 7 = 147 \text{ (м)}.$$

3. За 3 сек расстояние уменьшается в первом случае на  $7 \cdot 3 = 21$  (м), а во втором случае на столько же метров увеличивается.

Значит, в первом случае расстояние сократится до  $140 - 21 = 119$  (м), а во втором случае возрастет до  $140 + 21 = 161$  (м).

4. В первом случае расстояние уменьшится на 7 м 10, а во втором на столько же увеличится.

Формулы расстояний будут такие:

$$140 - 7 \cdot 10 \text{ (в первом случае);}$$

$$140 + 7 \cdot 10 \text{ (во втором случае).}$$

5. В общем виде расстояния через x сек будут представлены выражениями:  $140 \pm 7x$ .

На другом уроке решаются две задачи на движение навстречу и вдогонку (рис. 27).

Условия обеих задач целесообразно написать вместе



расстояние между пунктами А и В — 140 м. Из этих точек <sup>навстречу</sup> <sup>вдогонку</sup> друг другу выехали одновременно два велосипедиста со скоростями 4 м и 3 м в секунду.

Требуется найти ответы на следующие вопросы:

1. На сколько метров они сближаются за 1 сек?
2. Каково будет расстояние между ними через 1 сек? 2 сек? 4 сек?
3. Через сколько секунд они окажутся рядом?

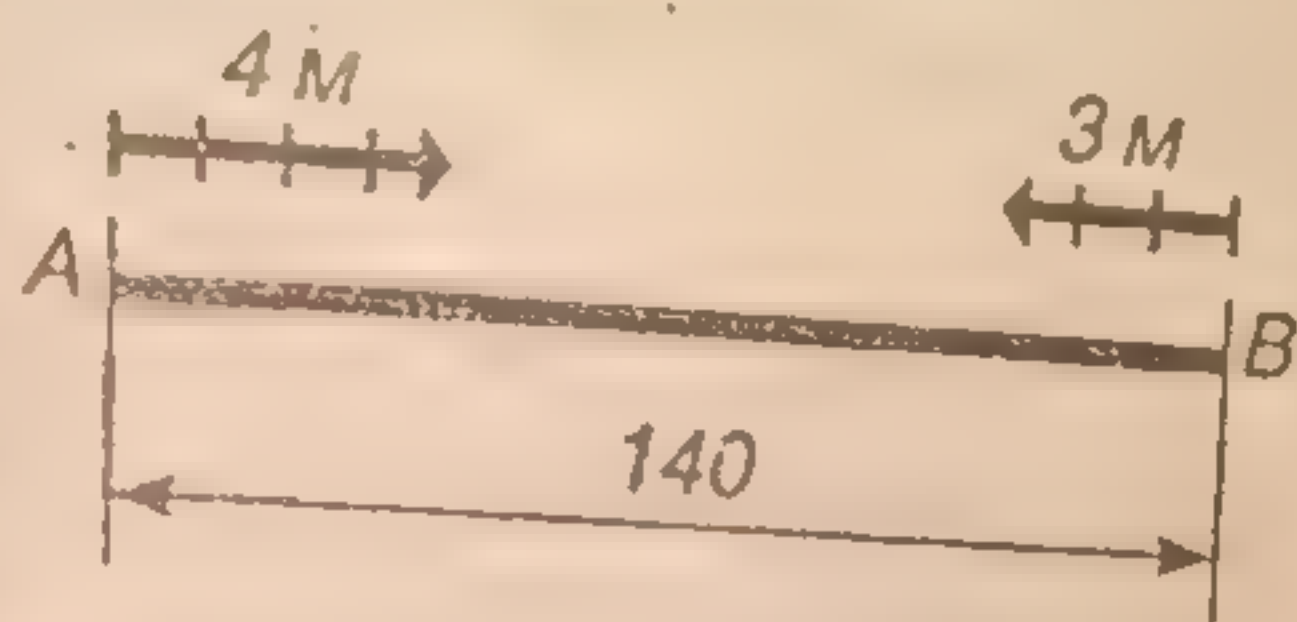


Рис. 27.

Написать ответ в виде выражения.

При решении этих задач обращаем внимание на то, что здесь одна задача разделена на две части.

Условия этих частей, как и вопросы, совершенно одинаковые.

Ответы на вопросы задач вычисляем параллельно и записываем рядом.

Особенно тщательно следует рассмотреть первый вопрос, посвятив ему специальный урок, причем мы здесь намеренно приводим подробные рассуждения. Предположим, что второй велосипедист стоит на месте, а первый движется с той же скоростью.

Тогда через секунду расстояние между ними сократилось бы до:

$$1) 140 - 4 = 136 (м) \quad 1) 140 - 4 = 136 (м)$$

Но второй велосипедист за это время (за 1 сек) переместится на 3 м; а именно в первом случае он приблизился к другому велосипедисту, а во втором случае он удалился от него на 3 м.

Поэтому фактически расстояние между ними будет через 1 секунду соответственно:

$$2) 136 - 3 = 133 (м) \quad 2) 136 + 3 = 139 (м)$$

Но вначале расстояние между ними было 140 м, поэтому расстояние сократилось соответственно на:

$$3) 140 - 133 = 7 (м) \quad 3) 140 - 139 = 1 (м)$$

Далее ставится вопрос:



Почему же в первом случае расстояние сокращается быстрее?

Как можно было найти ответ на задачу одним действием?

Выполняется это действие:

$$4 + 3 = 7 \text{ (м)} \quad 4 - 3 = 1 \text{ (м)}$$

Итак, за 1 сек (за каждую секунду) велосипедисты сближаются на 7 м при движении навстречу и на 1 м при движении вдогонку.

А как узнать, насколько они сблизятся за 2 сек? за 4 сек? Во сколько раз увеличится сближение? Каким действием найдем это?

$$7 \cdot 4 = 28 \text{ (м)} \quad 1 \cdot 4 = 4 \text{ (м)}$$

Каково же будет расстояние между ними через 4 сек?

$$140 - 28 = 112 \text{ (м)} \quad 140 - 4 = 136 \text{ (м)}$$

Через сколько секунд они окажутся рядом? На сколько метров они должны для этого сблизиться? На сколько метров сближаются они за 1 сек при движении навстречу и вдогонку?

$$140 : 7 = 20 \text{ (сек)} \quad 140 : 1 = 140 \text{ (сек)}$$

Затем решаются пары сопряженных задач, когда требуется найти расстояния между движущимися телами через несколько секунд, минут, часов.

И наконец, решаются одновременно задачи на определение времени, через которое два тела оказываются рядом, в одном месте.

Эти задачи для краткости мы изложили в одном тексте, и решение их необходимо завершать проверкой.

1) Какое расстояние проехал первый велосипедист до встречи?

$$4 \cdot 20 = 80 \text{ (м)}$$

2) Какое расстояние проехал второй велосипедист до встречи?

$$3 \cdot 20 = 60 \text{ (м)}$$



3) Каково расстояние между ними было первоначально?

$$80 + 60 = 140 \text{ (м)}$$

формулы решения этих задач можно выразить на буквах:

движение навстречу

движение вдогонку

$$a : (x + y) \text{ или } \frac{a}{x + y}$$

$$a : (x - y) \text{ или } \frac{a}{x - y}$$

После этого учащимся предложить составить и решить задачи на движение в одном и противоположном направлениях, например соответственно по формулам:

$$\frac{390}{8 + 5} =$$

$$\frac{390}{8 - 5} =$$

Задачи на движение можно также решить алгебраическим способом.

В предыдущем изложении мы рассмотрели противопоставление двух видов задач на движение навстречу и вдогонку.

Хорошим средством развития мышления учащихся является также прием обращения, когда прямая задача рассматривается совместно с обратной задачей.

Рассмотрим следующую задачу:

Два парохода отошли одновременно от двух пристаней и идут навстречу друг другу. Встретились они через 2 ч. Один пароход шел со скоростью 20 км в час, другой — 30 км в час. Найти расстояние между пристанями.

Решение:

1)  $20 + 30 = 50 \text{ (км)}$ ;

2)  $50 \cdot 2 = 100 \text{ (км)}$ .

После решения записывается схема задачи:

2 ч, 20 км, 30 км, 100 км

Составим схемы обратных задач:



1-я обратная:  $\boxed{2 \text{ ч}}$ , 20 км, 30 км, 100 км

2-я обратная: 2 ч,  $\boxed{20 \text{ км}}$ , 30 км, 100 км

3-я обратная: 2 ч, 20 км,  $\boxed{30 \text{ км}}$ , 100 км

Условие третьей обратной задачи будет таким:

Два парохода вышли одновременно навстречу друг другу от двух пристаней и встретились через 2 ч. Расстояние между пристанями 100 км. Один пароход шел со скоростью 20 км в час. Определить скорость второго парохода.

Решение:

I способ

- 1)  $100 : 2 = 50 \text{ (км)}$
- 2)  $50 - 20 = 30 \text{ (км)}$

II способ

- 1)  $20 \cdot 2 = 40 \text{ (км)}$
- 2)  $100 - 40 = 60 \text{ (км)}$
- 3)  $60 : 2 = 30 \text{ (км)}$

## 6. Табличное изображение задач

Практика обучения показывает, что при решении задач целесообразно работать над группами родственных задач, связи между которыми можно изобразить таблицей (матрицей).

Рассмотрим задачу:

В первый день скосили 40 га посевов; во второй день в 2 раза  $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$ , чем в первый день. В третий день скосили на 15 га  $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$ , чем во второй день.

Читая условие со словами, записанными над чертой, получаем первую задачу; читая то же самое условие, но со словами, записанными под чертой, получаем условие второй задачи.



Решение исходной задачи:

$$1) 40 \cdot 2 = 80 \text{ (га);}$$

$$2) 80 + 15 = 95 \text{ (га).}$$

Решение второй задачи:

$$1) 40 : 2 = 20 \text{ (га);}$$

$$2) 20 - 15 = 5 \text{ (га).}$$

Другую пару задач можно получить, иначе переставив во второй части задачи слова над чертой и под чертой.

В первый день скосили 40 га посевов, во второй день в 2 раза  $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$ , чем в первый день. В третий день скосили на 15 га  $\frac{\text{меньше}}{\text{больше}}$ , чем во второй день.

Решение этой четверки задач удобно расположить в таблице:

В 2 раза	На 15	
	Больше	Меньше
Больше	$40 \cdot 2 + 15$	$40 \cdot 2 - 15$
Меньше	$40 : 2 + 15$	$40 : 2 - 15$

Этот метод поучителен также и при рассмотрении задач, решаемых с помощью уравнений.

На двух складах 8 т муки. Причем на первом складе 2 т  $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$ , чем на втором складе. Сколько тонн муки на каждом складе в отдельности?

Решение.



	Первая задача	Вторая задача
На I складе На II складе Уравнение	$x$ $x - 2$ $x + (x - 2) = 8$ $2x - 2 = 8$ $2x = 10$ $x = 5$	$y$ $y + 2$ $y + (y + 2) = 8$ $2y + 2 = 8$ $2y = 6$ $y = 3$
Ответ. На I складе На II складе	$5 \text{ т}$ $5 - 2 = 3 \text{ т}$	$3 \text{ т}$ $3 + 2 = 5 \text{ т}$

Ученики замечают, что ответы данных задач состоят из переставленных чисел.

Наш опыт показал эффективность приема, когда решенная исходная задача преобразовывается не только в обратную, но и в двойственную задачу (не путать с обратной!).

Рассмотрим пример.

#### Исходная задача

В первый день скосили 40 га посевов, во 2 день в 2 раза больше, чем в первый. Сколько гектаров скосили во второй день?

Решение:

$$40 \cdot 2 = 80 \text{ (га)}$$

#### Двойственная задача

Во второй день скосили 40 га посевов, что было в 2 раза меньше, чем в первый день. Сколько гектаров скосили во второй день?

Решение:

$$40 \cdot 2 = 80 \text{ (га)}$$

Условия разные, а решение общее.

Задача, двойственная по отношению к исходной, отличается от обратной ей задачи изменением ключевого понятия (например, больше изменяется на меньше).

При изучении задач на движение весьма удобно рассматривать четверку задач, записав их условия в таблице (матрице); при этом направления движения сопоставляются в таблице из четырех рисунков (рис. 28).



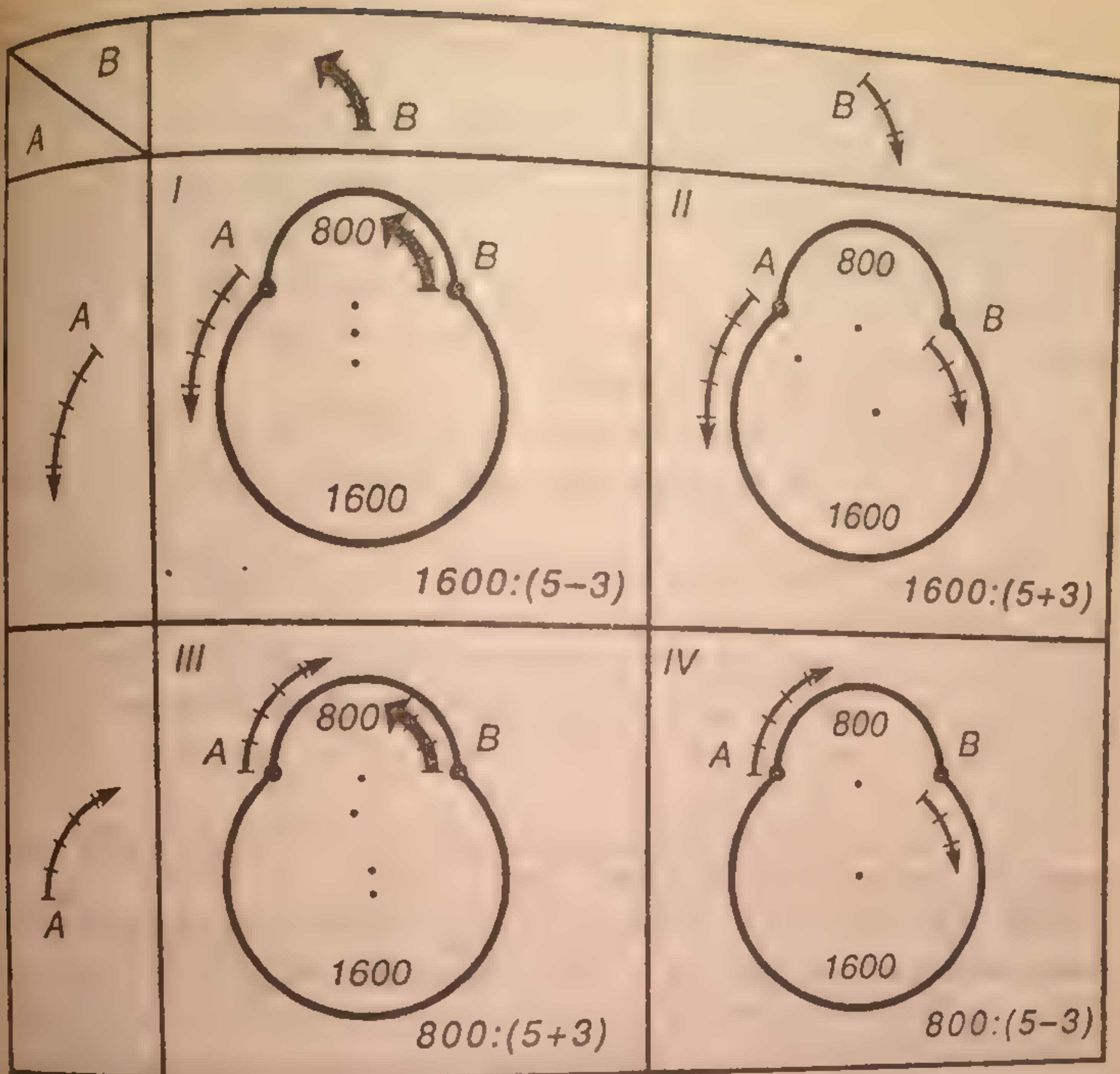


Рис. 28.

Между двумя точками A и B проходят две дороги: длинная в 1600 м и короткая в 800 м. Из этих точек выехали два велосипедиста со скоростью 5 м и 3 м в секунду. Через сколько секунд они окажутся рядом? (Рассмотреть все возможные случаи.)

Решение задачи удобно изобразить в четверной схеме с двумя входами.

Подобная четверка задач позволяет рассмотреть целостную математическую ситуацию, перебирая все возможные сочетания направлений движения двух тел, эти направления изображены на самих рисунках в таблице.

По этой схеме удобно проводить обучающую беседу. Учитель. Чем отличается задача I от задачи II? Как это отразилось в решениях?

Ученик. В первой задаче происходит движение вдогонку. А во второй задаче движение происходит навстречу друг другу.



Учитель. Что общего и различного в задачах I и IV, изображенных на рисунке?

Ученик. Там и тут движение вдогонку.

Учитель. В каком случае быстрее нагонит один велосипедист другого?

Ученик. В IV случае, так как скорость догоняющего велосипедиста больше, а в I случае скорость догоняющего велосипедиста меньше.

Учитель. Что можно сказать о задачах II и III?

Ученик. Здесь происходит движение навстречу друг другу.

Учитель. Чем же отличаются эти задачи друг от друга? В каком случае они встретятся быстрее?

Ученик. В задаче III встреча произойдет раньше, так как расстояние между велосипедистами здесь всего 800 м, т.е. меньше, чем в задаче II, где оно составляет 1600 м.

Мы описали беседу, основанную на качественных сравнениях задач: I — II, II — III, I — IV.

При дальнейшем анализе задач можно поставить и такой вопрос: какова скорость сближения велосипедистов в I и IV случаях?

Ученик. Скорости сближения равные, так как в обоих случаях движение совершается вдогонку. Скорость сближения равна  $5 - 3 = 2$  (м).

Учитель. В IV случае встреча произойдет в 2 раза раньше, чем в I случае:

$$1600 : 800 = 2 \text{ (раза).}$$

Какова скорость сближения велосипедистов во II и III случаях?

Ученик. Скорости сближения в этих задачах тоже равны. Здесь движение происходит навстречу друг другу, поэтому общая скорость находится сложением:

$$5 + 3 = 8 \text{ (м)}$$

Учитель. Во сколько раз раньше произойдет встреча в III случае, чем во II? Почему?

Ученик. Встреча в III случае произойдет в 2 раза быстрее, так как в обоих случаях скорости одинаковые, а расстояние между велосипедистами в III случае всего 800 м, а во II — 1600 м.

Далее проводим беседу по дальнейшему рассмотрению различных случаев при решении этих задач, напри-



мер: через сколько секунд будут систематически встречаться велосипедисты в каждой из четырех задач.

Выясняется, что в этом плане первая задача сливается с четвертой: в обоих случаях последующие встречи будут происходить через одно и то же время (точно так же во II и III случаях).

II и III задачи:

$$(1600 + 800) : (5 + 3) = \\ = 2400 : 8 = 300 \text{ (сек)} = \\ = 5 \text{ мин}$$

Встречи будут происходить через каждые 5 мин

I и IV задачи:

$$(1600 + 800) : (5 - 3) = \\ = 2400 : 2 = 1200 \text{ (сек)} = \\ = 20 \text{ мин}$$

Встречи будут происходить через каждые 20 мин.

Рассмотрим еще одну четверку задач.

На ледяной дорожке в точках A и B находятся два конькобежца на расстоянии 100 м друг от друга. Из этих точек они начали двигаться одновременно. Каково будет расстояние между ними через 10 сек (рис. 29)?

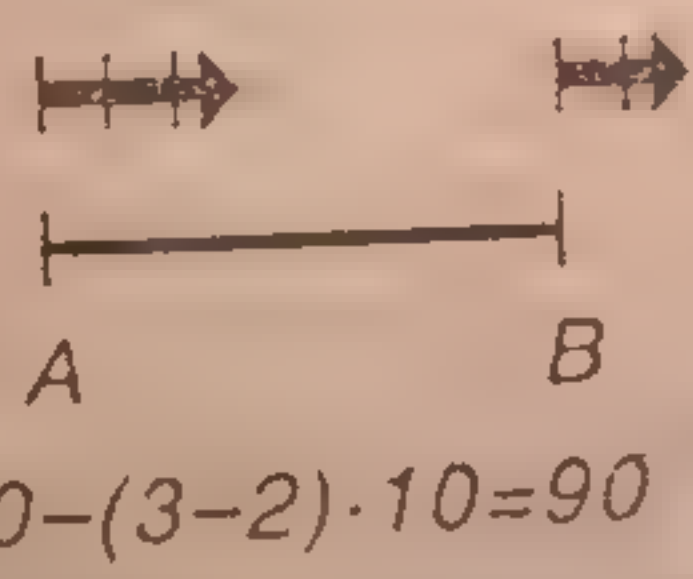
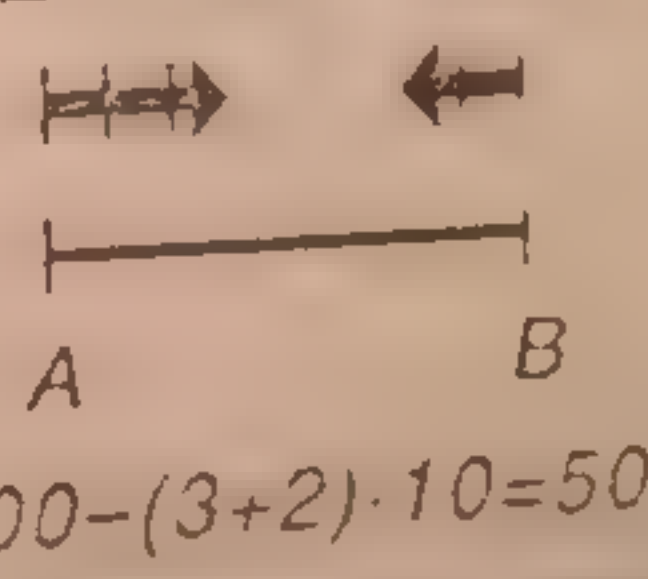
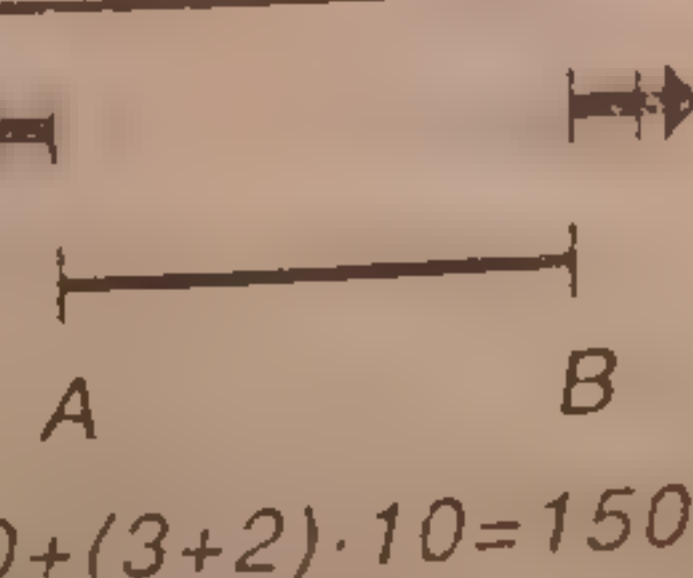
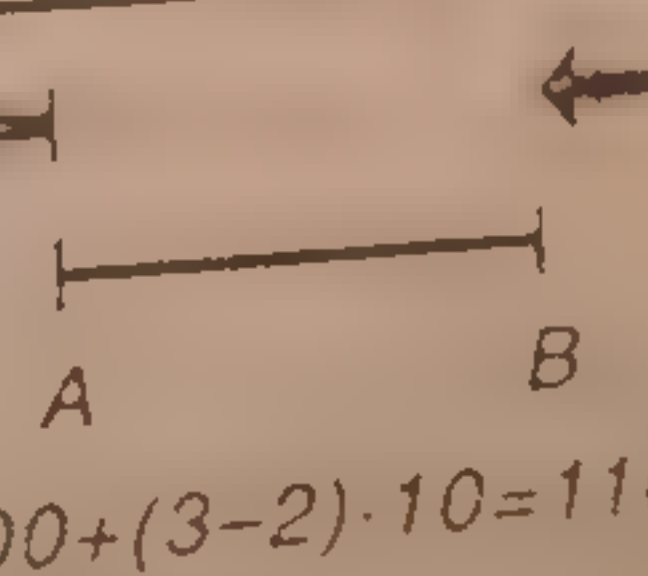
A \ B	B →		← B	
	A →		← A	
3 → A	 $100 - (3 - 2) \cdot 10 = 90$	I	 $100 - (3 + 2) \cdot 10 = 50$	II
3 ← A	 $100 + (3 + 2) \cdot 10 = 150$	III	 $100 + (3 - 2) \cdot 10 = 110$	IV

Рис. 29.

Рассмотреть и изобразить все возможные случаи:

1) Чем различаются или сходны задачи (I) и (IV)? (II) и (III)?



2) Почему расстояние в задаче (I) уменьшается медленнее, чем в задаче (II)?

3) Почему расстояние в задаче (III) увеличивается быстрее, чем в (IV), и т.п.

ЗАНИ  
МАТ

Мате  
пользо  
ков —  
нику у  
мател  
В эт  
как мо

1.3

В н  
четы  
этой  
На  
бина  
тиче  
или  
Н  
Р  
ни  
У  
ни



## Глава VIII

# ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Математика — предмет настолько серьезный, что воспользоваться каждой возможностью оживления уроков — чрезвычайно важно. Учитель должен помочь ученику увидеть в серьезном курьезное, в скучном — интересное, в обычном — необычное.

В этой главе мы приведем несколько примеров того как может быть организована данная работа.

### 1. Занимательные задачи на свойства действий

В начальной школе дети упражняются в выполнении четырех действий над целыми числами. Большая часть этой работы совершается устно.

Накопление в памяти соответствующих числовых комбинаций уместно связывать для ознакомления с теоретическими обобщениями, с символической записью тех или иных соотношений.

Начнем с простейших суждений.

Роль единичного элемента при сложении и умножении соответственно выполняют нуль и единица.

Уместно записать правила действий над нулем и единицей рядом в общем виде:

1) $a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
2) $0 + a = a$	$1 \cdot a = a$
3) $a - 0 = a$	$a : 1 = a$
4) $a - a = 0$	$a : a = 1$
5) $0 + 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$
	$1 : 1 = 1$



Данные формулы прочитываются учащимися словесно попарно:

При сложении числа с нулем сумма равна этому числу и т.д.

При умножении числа на единицу произведение равно этому же числу и т.д.

Эти формулы целесообразно подтверждать числовыми подстановками:

$$a + 0 = a$$

$$7 + 0 = 7$$

$$8 + 0 = 8$$

$$9 + 0 = 9$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$7 \cdot 1 = 7$$

$$8 \cdot 1 = 8$$

$$9 \cdot 1 = 9$$

Соотношения об изменении результатов действий в зависимости от изменения компонентов целесообразно также выражать символически.

Пусть дано произведение двух множителей:

$$7 \cdot 10 = 70$$

Проводим наблюдение: увеличим первый множитель на 1:

$$8 \cdot 10 = 80; \quad \text{но } 70 < 80;$$

Итак, имеем:  $7 \cdot 10 < 8 \cdot 10$

$$a \cdot 10 < (a + 1) \cdot 10$$

Следовательно,  $a \cdot x < (a + 1) \cdot x$ .

Делаем вывод: при увеличении одного из множителей и постоянном другом множителе произведение увеличивается.

Этот вывод проверяется числовыми подстановками:

$$a \cdot x < (a + 1) \cdot x$$

$$\begin{array}{ccc} 6 \cdot & & 7 \cdot \\ 16 \cdot & 100 < & 17 \cdot \\ 36 \cdot & & 37 \cdot \end{array} \quad 100$$

Аналогично можно предложить проверить следующее соотношение:



$$b \cdot y > b \cdot (y - 2)$$

$$100 \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 15 \\ \cdot 49 \end{matrix} > 100 \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 13 \\ \cdot 47 \end{matrix}$$

Вывод: при уменьшении одного из множителей и постоянстве другого множителя произведение уменьшается.

## 2. Занимательные задачи на расстановку чисел

Занятие надо начинать с простейших заданий на расстановку чисел в фигурах.

1. Расставить соответственно пять (девять) чисел так, чтобы сумма чисел вдоль каждого луча была равна одному и тому же числу — 10 (рис. 30).

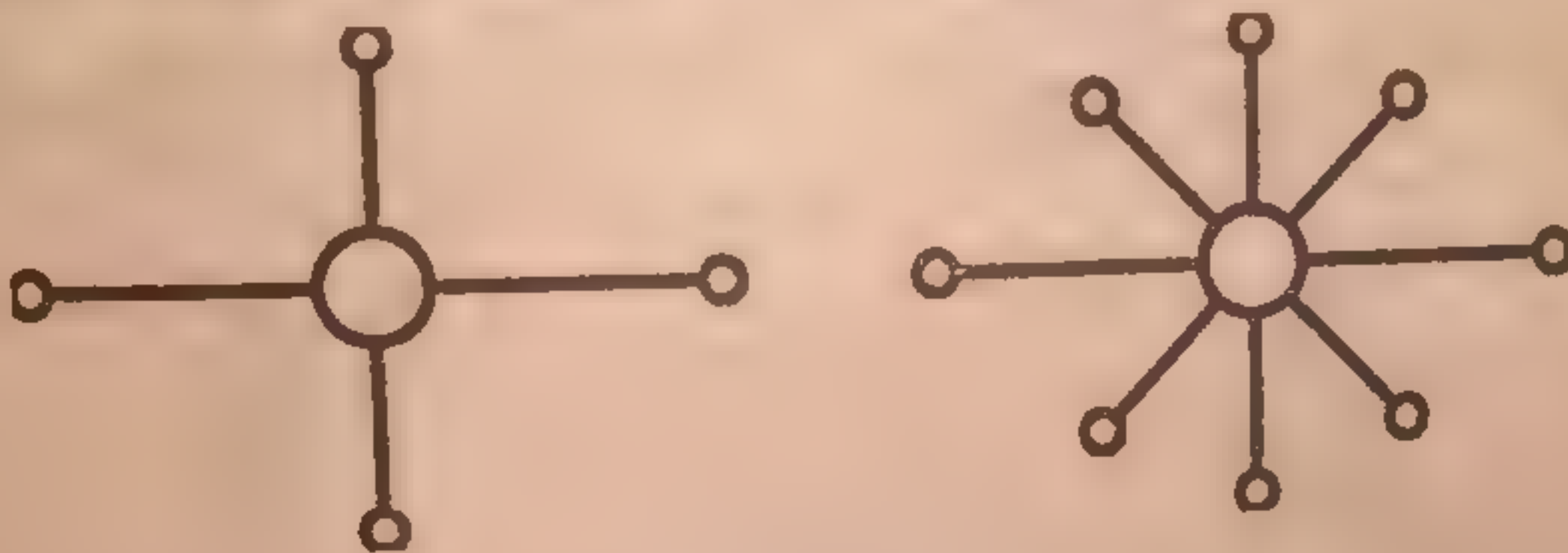


Рис. 30.

2. Расставить числа от 1 до 6 так, чтобы вдоль каждой стороны треугольника сумма составляла 9 (рис. 31).

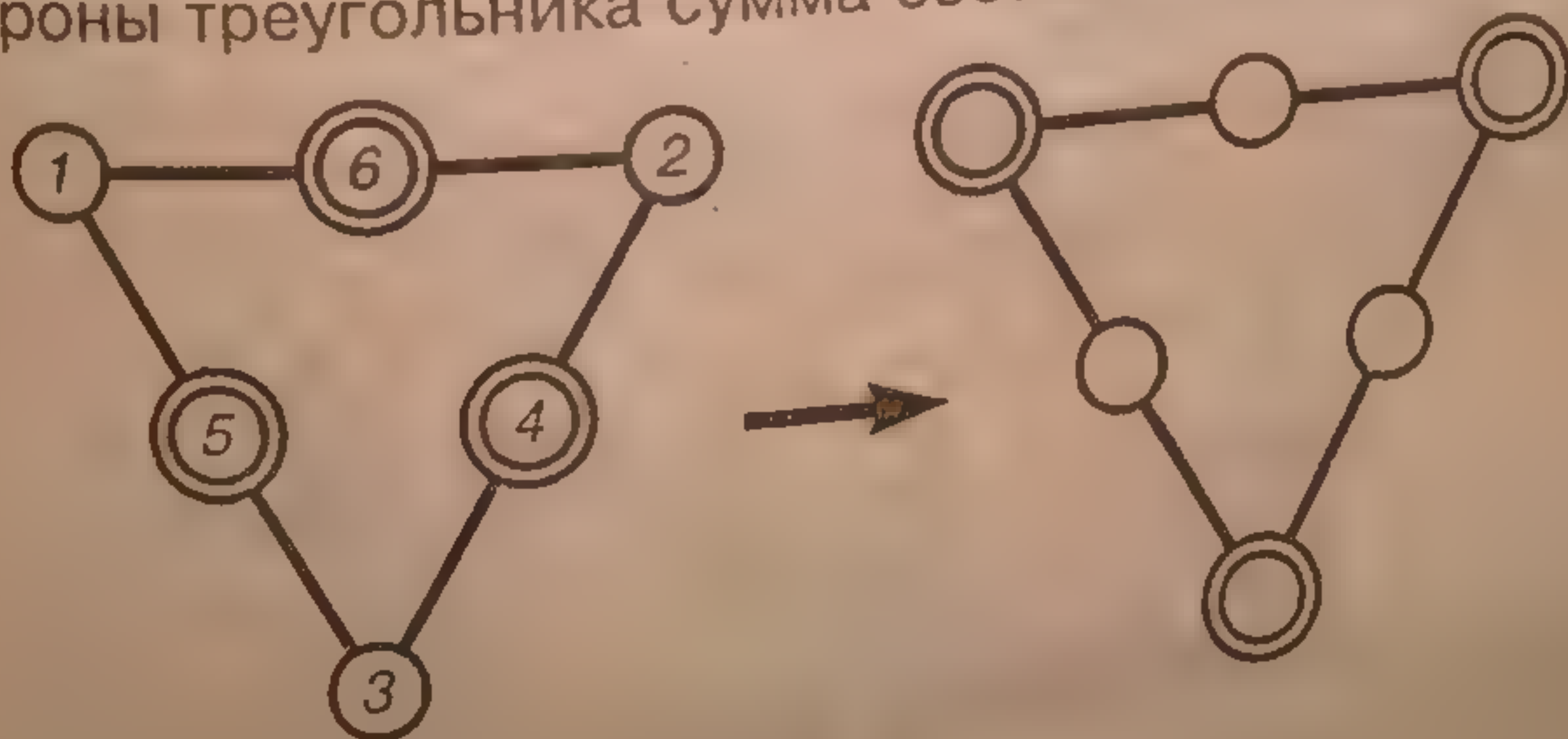


Рис. 31.



3. Переместить средние числа в вершины. Какая получится сумма вдоль каждой стороны треугольника (рис. 31)?

Аналогичная задача для чисел от 1 до 9.

4. Равные суммы, расположенные вдоль каждой стороны треугольника, могут иметь разные значения (например, 17). Поменяйте местами числа 1, 2, 3 с числами 7, 8, 9 (и наоборот). Какие будут суммы вдоль каждой стороны треугольника (рис. 32)? Почему суммы увеличились?

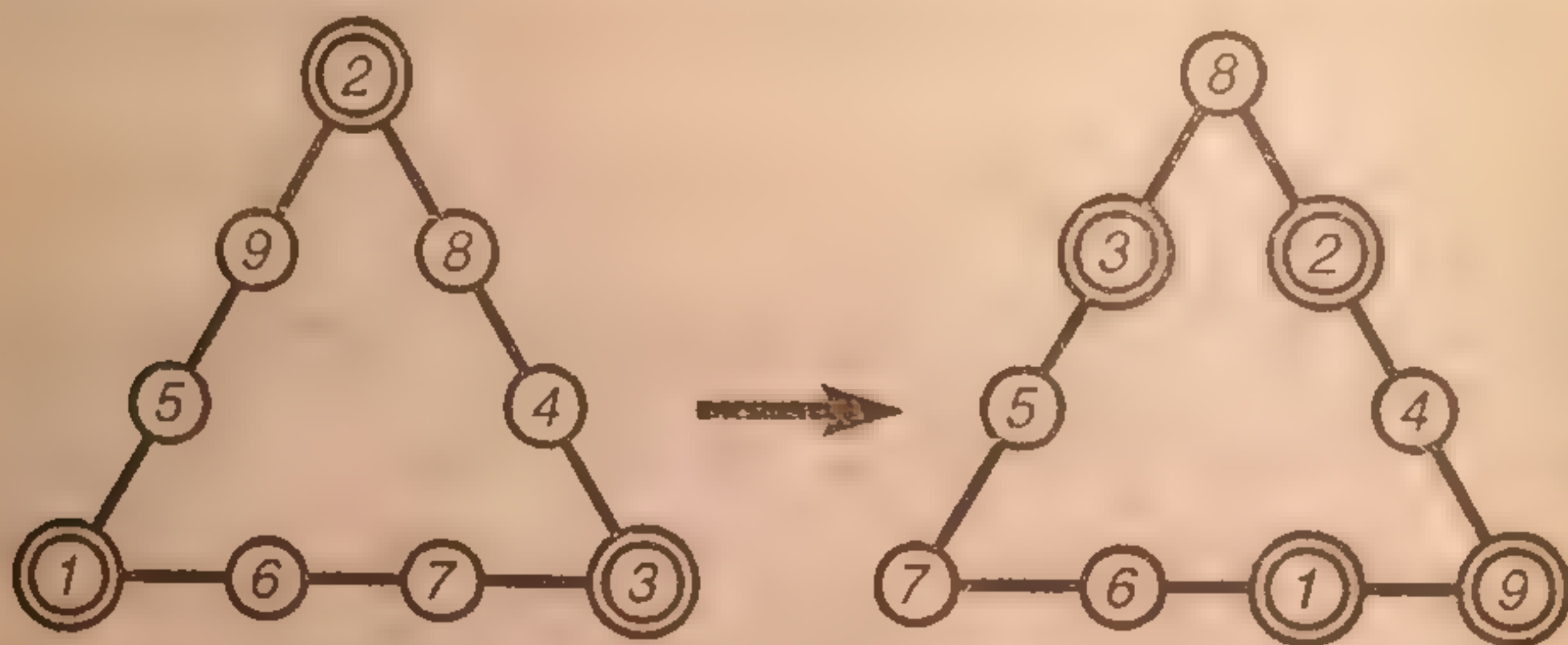


Рис. 32.

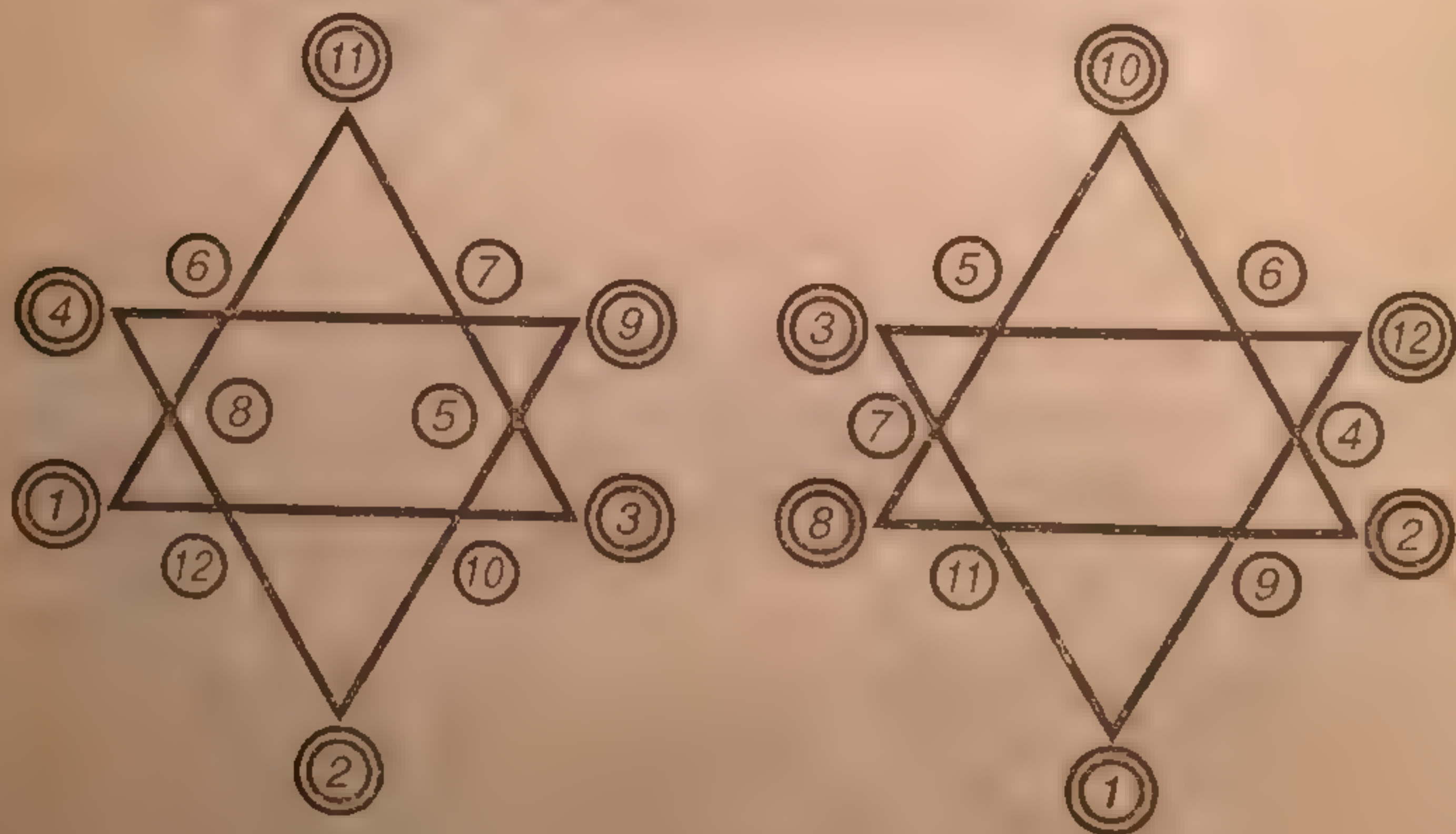


Рис. 33.

Какой еще треугольник можно образовать? Каким способом?



5. Из двух треугольников составить шестиугольник так, чтобы вдоль каждой стороны сумма четырех чисел составляла одно и то же число — 26.

Справа показан такой же шестиугольник, но в нем каждое число уменьшено на 1, и поэтому соответствующая сумма чисел вдоль стороны равна  $26 - 4 = 22$  (рис. 33).

6. Расставить четыре единицы, четыре двойки, четыре тройки и четыре четверки в клетках квадрата так, чтобы в каждом ряду (по горизонтали, вертикали и диагонали) была одна и та же сумма:  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  (рис. 34).

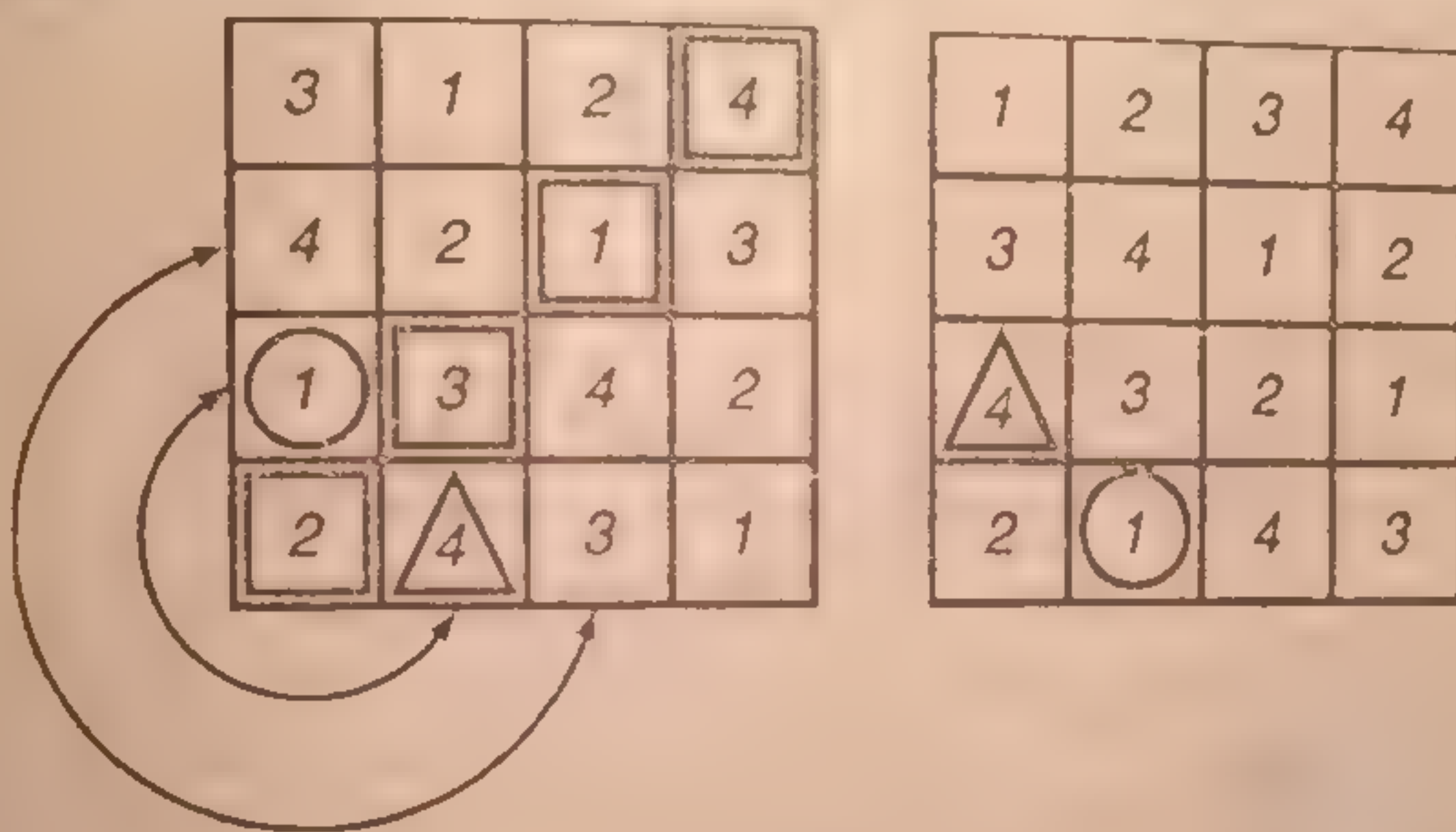


Рис. 34.

Приведем решение этой задачи.

Поменяем местами числа 1 и 4, 4 и 3 и т.д. так, как показано стрелками, получим новый квадрат (справа), который обладает теми же свойствами.

На основе этой задачи можно решить занимательную задачу другого вида.

7. В штаб вызвали представителей от четырех родов войск:

- |                  |     |     |
|------------------|-----|-----|
| 1) артиллеристов | (А) | (1) |
| 2) стрелков      | (С) | (2) |
| 3) танкистов     | (Т) | (3) |
| 4) пограничников | (П) | (4) |

Каждый род войск послал по одному

- |                |     |
|----------------|-----|
| (1) рядовому   | (р) |
| (2) ефрейтору  | (е) |
| (3) сержанту   | (с) |
| (4) лейтенанту | (л) |



Требуется выстроить всех 16 военных квадратом так, чтобы не повторялся ни в одном ряду ни род войск, ни военное звание.

Решение.

На рисунке 34 заменим цифры начальными буквами родов войск (рис. 35). Наложив правую таблицу на левую, получим решение на рисунке 36.

Т	А	С	П
П	С	А	Т
А	Т	П	С
С	П	Т	А

Рис. 35.

Р	Е	С	Л
С	Л	Р	Е
Л	С	Е	Р
Е	Р	Л	С

Тр	Ае	Сс	Пл
Пс	Сл	Ар	Те
Ал	Тс	Пе	Ср
Се	Пр	Тл	Ас

Рис. 36.

В этом решении

Тр — означает танкист — рядовой,

Ас — означает артиллерист — сержант и т.д.

а)



а

4	9	2
3	5	7
8	1	6

а+1

5	10	3
4	6	8
9	2	7

б)

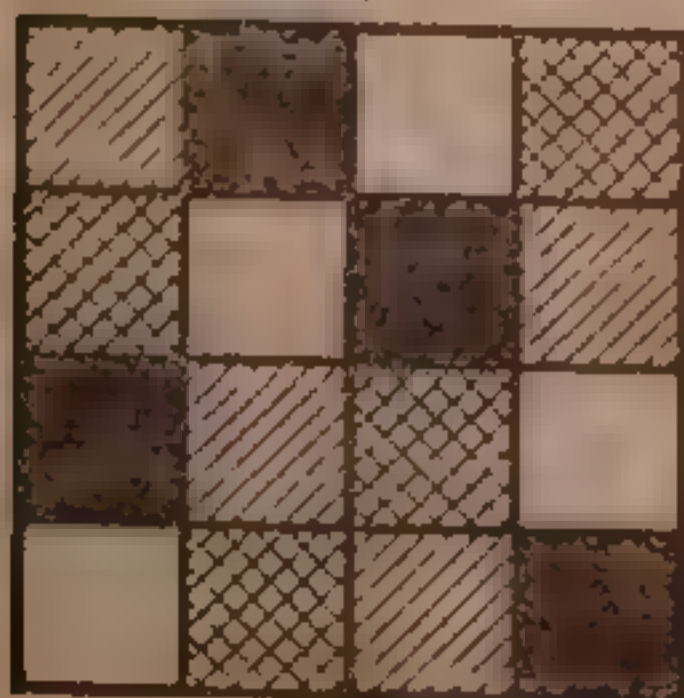


Рис. 37.

б

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Рис. 38.

б-1

15	1	2	12
4	10	9	7
8	6	5	11
3	13	14	0

Рис. 39.

8. Даны три черных, три серых и три белых кубика. Надо их расставить так, чтобы ни по одной горизонтали, вертикали не повторялся один и тот же цвет (рис. 37, а).

9. Найти такое расположение  $4 \cdot 4 = 16$  кубиков, чтобы цвет не повторялся ни по горизонтали, ни по вертикали,



ни по диагонали (рис. 37, б). Эту задачу можно обобщить и на  $5 \cdot 5 = 25$  кубиков и т.д.

### 3. Занимательные (магические) квадраты

Еще в начале развития математики люди интересовались занимательным квадратом с разными числами.

1. Рассмотрим занимательный квадрат из  $3 \cdot 3 = 9$  клеток, в котором сумма чисел по вертикали, горизонтали, рядам и по диагонали равна 15 и квадрат из  $4 \cdot 4 = 16$  клеток, который имеет соответствующую сумму, равную 34 (рис. 38).

При работе с занимательным квадратом полезно предлагать учащимся создавать на основе исходных квадратов новые квадраты, увеличив или уменьшив каждое число на одно и то же число, например, как квадраты на рисунке 39.

Учащиеся должны объяснить, почему в новом квадрате  $3 \cdot 3$  сумма ряда увеличилась на 3 ( $15 + 3 = 18$ ), а во втором квадрате  $4 \cdot 4$  сумма ряда, наоборот, уменьшилась на 4 ( $34 - 4 = 30$ ).

2. Приложив друг к другу несколько магических квадратов  $4 \cdot 4$ , можно получить так называемую «дьявольскую» таблицу (рис. 40).

7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4
7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4

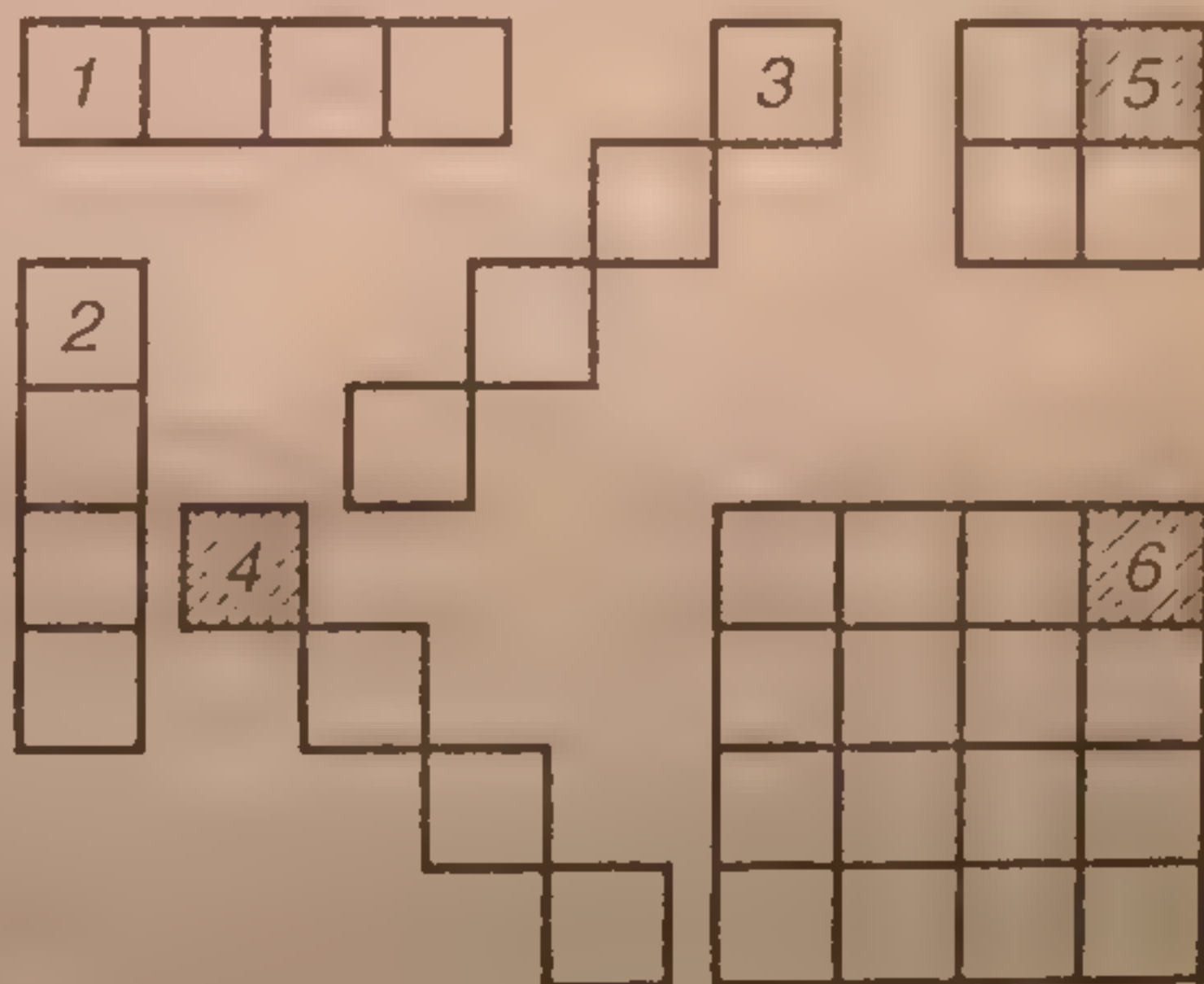


Рис. 40.

Рядом с этой таблицей показаны 6 различных способов набора четверок клеток из этой таблицы: сумма



четырех выбранных чисел таблицы всегда оказывается равной 34.

#### 4. Занимательные числовые равенства (тождества)

Большой интерес у учащихся вызывают занятия по рассмотрению числовых равенств, например:

1. Сумма нескольких чисел равна произведению этих же чисел:

$$2 + 2 = 2 \cdot 2$$

$$1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \quad \text{и т.д.}$$

$$\square + \square + \square + \square + \square + \square = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square$$

2. Результат последовательного вычитания равен результату последовательных делений на те же числа:

$$4 - 2 = 4 : 2$$

$$6 - 3 - 2 = 6 : 3 : 2$$

$$8 : 4 : 2 : 1 = 8 - 4 - 2 - 1 \quad \text{и т.д.}$$

$$\square : \square : \square : \square : \square = \square - \square - \square - \square - \square$$

3. Сумма нескольких последовательных нечетных чисел равна произведению числа этих слагаемых само на себя:

$$1 + 3 = 2 \cdot 2 \quad (\text{слева 2 слагаемых})$$

$$1 + 3 + 5 = 3 \cdot 3 \quad (\text{слева 3 слагаемых})$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \cdot 4 \quad (\text{слева 4 слагаемых})$$

. . . . .

4. Используя четыре действия и скобки, запишите с помощью четырех четверок последовательно числа натурального ряда (некоторые числа можно выразить несколькими способами):

$$4 : 4 + 4 - 4 = 1 \quad (4 : 4) \cdot (4 : 4) = 1$$

$$4 : 4 + 4 : 4 = 2 \quad (4 \cdot 4) : (4 + 4) = 2$$

$$(4 - 4 - 4) : 4 = 3 \quad (4 + 4 + 4) : 4 = 3$$



Можно предложить решить предыдущую задачу с четырьмя двойками, например:

$$\begin{aligned} 22 : 22 &= 1 \\ 2 : 2 + 2 : 2 &= 2 \end{aligned}$$

5. Продолжите ряд равенств и найдите соответствующую закономерность:

$$\begin{aligned} 1. \quad & + 2 = 1 \\ 2. \quad & + 3 = 2 \\ 3. \quad 9 & + 4 = 3 \\ \square. & + \square = 4 \\ \square. & + \square = 5 \end{aligned} \quad 1$$

.....

Придумайте самое большое такое равенство и проверьте его.

6. Проверьте числовые равенства.

$$\begin{aligned} 1. \quad & + 2 = 1 \\ 12. \quad 9 & + 3 = 111 \\ 123. & + 4 = 1111 \end{aligned}$$

7. Продолжите и проверьте равенства:

$$\begin{aligned} 1. \quad & + 1 = 9 \\ 12. \quad 8 & + 2 = 98 \\ 123. & + 3 = 987 \end{aligned}$$

8. Запишите число 100 несколькими способами, используя все цифры от 1 до 9 (в порядке возрастания) и действия первой ступени:

$$\begin{aligned} 123 + 45 - 67 + 8 - 9 &= 100 \\ 123 - 45 - 67 + 89 &= 100 \end{aligned}$$

9. Запишите число 100, используя цифры от 1 до 9 и все арифметические действия:



$$(9 + 8 + 7 + 6 - 5) \cdot (4 + 3 - 2 - 1) = 100$$

$$(1 + 2 + 3 + 4) \cdot (5 + 6) + 7 - 8 - 9 = 100$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100$$

10. Продолжите вниз ряд равенств. Покажите, какая здесь соблюдается закономерность:

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8 \text{ (слева 3, а справа } 3 - 1 = 2 \text{ слагаемых)}$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

.....

Сколько слагаемых слева?

Сколько слагаемых справа?

Кто составит самое большое такое равенство и проверит его?

### 5. Задачи-парадоксы с неожиданными ответами

Для развития мышления учащихся известное значение имеет прием, когда обычный ответ оказывается вдруг неверным и решение приобретает неожиданно новый смысл или оттенок. Этот прием знакомит учащихся с суждениями-парадоксами.

1. Учитель диктует: 5 увеличить на 3.

Ученик собирает из разрезных знаков пример:

$$5 + 3 = 8$$

Сколько знаков ты собрал при решении данной задачи?

Всего собрано пять знаков: три цифры (5, 3, 8), один плюс (+) и один знак равенства (=).

2. Учитель ставит на доску цифру 9.

— Требуется уменьшить число 9 на 3. Как получить ответ, не используя никаких знаков?

$$9 \rightarrow 6$$

Рис. 41.

$$18 \rightarrow 10$$

Рис. 42.

Ответ. Достаточно повернуть цифру 9, и ответ готов: получилась цифра 6! (рис. 41.)

3. Как разделить число 18 на две равные части, чтобы получилось по 10?

Ответ. Провести прямую через середину обеих цифр (рис. 42).



4. Из 3 спичек сложить треугольник. Сколько таких треугольников можно сложить из 6 спичек?  
 Ответ 2 треугольника (рис. 43).

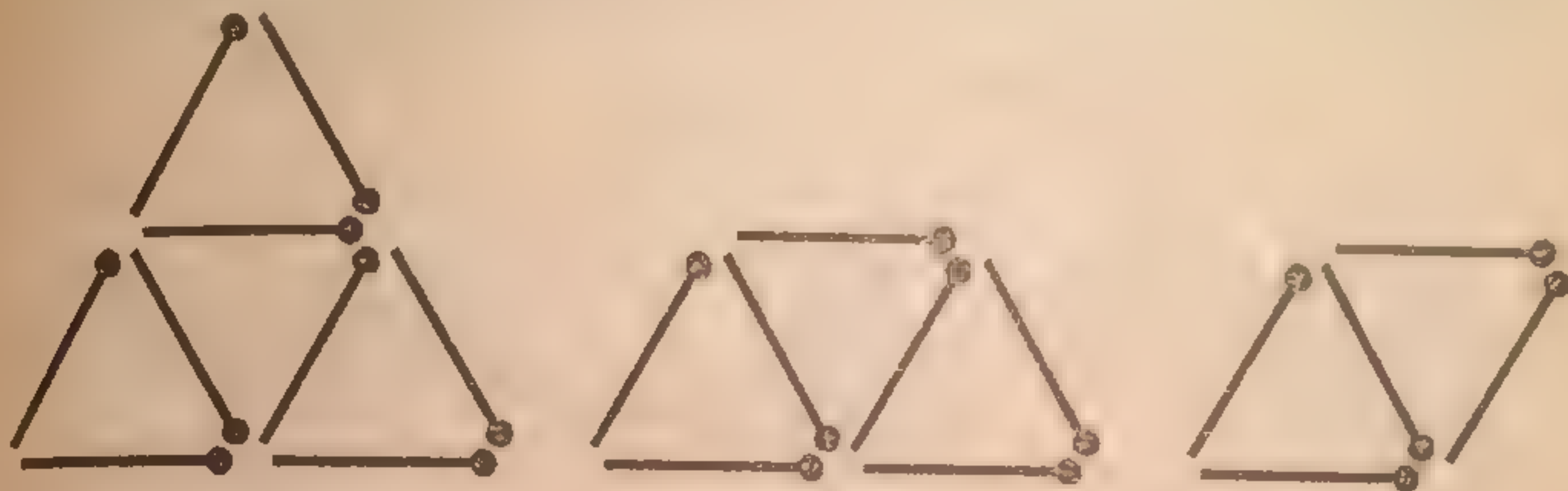


Рис. 43.

5. Постройте из 5 спичек два треугольника.  
 Далее будет нетрудно построить 3 треугольника из 7 спичек, 4 треугольника из 9 спичек. Задачу можно обобщить, например: сложите два квадрата из 7 спичек и т.д.

6. а) Нарисуйте 2 точки. Сколько прямых можно провести через 2 точки? (Одну.) (Рис. 44.)



Рис. 44.

б) Нарисуйте 3 точки. Проведите через них 3 прямые так, чтобы на каждой прямой было по 2 точки.

Интересна и поучительна обобщенная задача.

в) Как расположить 7 точек, чтобы через них проходили 6 прямых, причем на каждой прямой по 3 точки?

## 6. Отгадывание чисел

Для учащихся начальных классов бывают интересны задания на отгадывание задуманных чисел. Все эти задания основаны на свойствах уравнений с одним неизвестным.



## Первое задание

Учитель. Задумайте число, меньшее 10, но большее нуля.	Общий вид.
Ученики. Задумали.	$a$
Учитель. Умножьте его на 10.	
Ученики. Умножили.	$a \cdot 10 = 10a$
Учитель. Прибавьте 6.	
Ученики. Прибавили.	$10a + 6$
Учитель. Зачеркните первую цифру.	
Ученики. Зачеркнули.	Число десятков зачеркнули.
Учитель. У вас получилось 6!	Осталось 6.

## Второе задание

1. Учитель. Задумайте число, меньшее 10, но большее нуля.	Общий вид:
Ученики. Задумали.	$a$
Учитель. Умножьте его на 10.	
Ученики. Умножили.	$a \cdot 10 = 10a$
Учитель. Прибавьте 3.	
Ученики. Прибавили.	$10a + 3$
Учитель. Умножьте полученную сумму на 10.	
Ученики. Умножили.	$100a + 30$
Учитель. Прибавьте 8.	
Ученики. Прибавили.	$100a + 30 + 8 = 100a + 38$
Учитель. У вас получилось трехзначное число. Зачеркните первую цифру.	Зачеркнули разряд сотен.
Ученики. Зачеркнули.	Осталось 38.
Учитель. У всех получилось 38.	

2. а) Отгадайте число по составленной формуле:

$$\begin{aligned}(a \cdot 10 + 7) \cdot 10 + 4 &= x \\ a \cdot 100 + 70 + 4 &= x \\ a \cdot 100 + 74 &= x\end{aligned}$$



Зачеркните первую цифру. Сколько осталось?  
 б) Задумайте такое число, чтобы после выполнения всех действий по формуле и после зачеркивания первой цифры получилось бы число 49.

### Третье задание

1. Задумайте двузначное число. Умножьте его на 10. Прибавьте 8. Умножьте на 10. Прибавьте 6. Умножьте на 10. Прибавьте 4. Зачеркните первые две цифры. У вас осталось 864.

2. Выполните такое же задание, но чтобы в результате осталось 753.

### Четвертое задание

1а) Задумайте число, меньшее 10 и большее нуля. Умножьте его на 5. Прибавьте 3. Умножьте на 2. Зачеркните первую цифру.  
 Сколько у вас осталось?

$$\begin{array}{r|l} x & \\ x \cdot 5 = 5x & \\ 5x + 3 & \\ 10x + 6 & \\ 6 & \end{array}$$

Ответ. Задуманное число сначала умножили на 5, потом на 2, т.е. умножили на 10. Сколько было единиц, столько стало десятков. Потом мы прибавили 3, а когда умножили на 2, получили 6 единиц. Когда зачеркнули число десятков, осталось 6 единиц.

2. Отгадайте задуманное число по следующим записям:

- 1) Задумайте...
- 2) Умножьте на...
- 3) Прибавьте...
- 4) Умножьте...
- 5) Зачеркните..

$$\begin{array}{r|l} x & \\ x \cdot 5 & \\ 5x + 4 & \\ (5x + 4) \cdot 2 & \\ 8 & \end{array}$$

3. Придумайте такое же задание, чтобы после зачеркивания первой цифры в ответе получилось 2.

### Пятое задание

1. Задумайте число, меньшее 10, но большее нуля.
2. Умножьте его на 2.

$$\begin{array}{r|l} x & \\ 2x & \end{array}$$



3. Прибавьте к нему 1
4. Умножьте его на 5.

$$\begin{aligned}
 &2x + 1 \\
 &(2x + 1) \cdot 5 = \\
 &= 10x + 5 \\
 &5 \\
 &5 + 13 = 18 \\
 &18 - 8 = 10 \\
 &10
 \end{aligned}$$

5. Зачеркните первую цифру.
6. Прибавьте 13.
7. Вычтите 8.
8. У вас получилось...

б) Дайте подобное задание товарищу.

Замечание. После пятого шага ты уже знаешь, какое число загадал товарищ. Поэтому можно дальше предлагать различные действия и числа. В дальнейшем можно предлагать задания и по такой схеме.

1. Задумайте число
2. Умножьте на ...
3. Прибавьте.
4. Умножьте на...

$$\begin{aligned}
 &x \\
 &x \cdot 2 \\
 &2x + 1 \\
 &(2x + 1) \cdot 5 = \\
 &10x + 5
 \end{aligned}$$

5. Зачеркните первую цифру.
6. Умножьте оставшееся число само на себя.
7. Прибавьте 3.
8. Разделите на 14.
9. У вас получилось...

$$\begin{aligned}
 &5 \\
 &5 \cdot 5 = 25 \\
 &25 + 3 = 28 \\
 &28 : 14 = 2 \\
 &2
 \end{aligned}$$

### Шестое задание

- а) 1. Задумайте число, меньшее 10.
2. Умножьте его на 7.
3. Прибавьте задуманное число
4. Разделить на задуманное число.
5. Прибавьте 2.
6. Умножьте получившееся число само на себя, у вас получилось...

$$\begin{aligned}
 &x \\
 &x \cdot 7 \\
 &x \cdot 7 + x = x \cdot 8 \\
 &x \cdot 8 : x = 8 \\
 &8 + 2 = 10 \\
 &10 \cdot 10 = \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

б) Предложи товарищу подобное задание.

Замечание. После четвертого шага ты уже знаешь, какое число у загадавшего. Дальше можно предлагать выполнение различных действий.



Например:

1. Задумайте число.
2. Умножьте его на...
3. Вычтите задуманное число.
4. Разделите на задуманное число.
5. Прибавьте 45.
6. Удвойте получившееся число

$$\begin{aligned}
 &x \\
 &x \cdot 6 = 6x \\
 &6x - x = 5x \\
 &5x : x = 5 \\
 &5 + 45 = 50 \\
 &50 \cdot 2 = 100
 \end{aligned}$$

и т.д.

## 7. Задачи, связанные с составлением таблиц

При изучении математики целесообразно предлагать задачи, знакомящие с составлением ведомостей и таблиц. Например, надо заполнить ведомость поступления товаров на склад:

Наименование товара	Количество	Цена		Стоимость	
		руб.	коп.	руб.	коп.
Краски (I сорт)	100 кг	—	83		
Краски (II сорт)	300 кг	—	65		
Итого					

А вот другое задание такого же рода: восстановить пропущенные числа в ведомости на поступление товаров в магазин:

Наименование товара	Количество	Цена		Стоимость	
		руб.	коп.	руб.	коп.
Пальто	10	<input type="text"/>	30	783	—
Платья	<input type="text"/>	27	—	540	—
Шапки	50	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Итого				1923	—



## Упражнения на классификацию понятий

Кроме упражнений, связанных с числами и вычислениями, необходимо давать и логические упражнения, не связанные с вычислениями.

Приведем некоторые из таких логических упражнений.

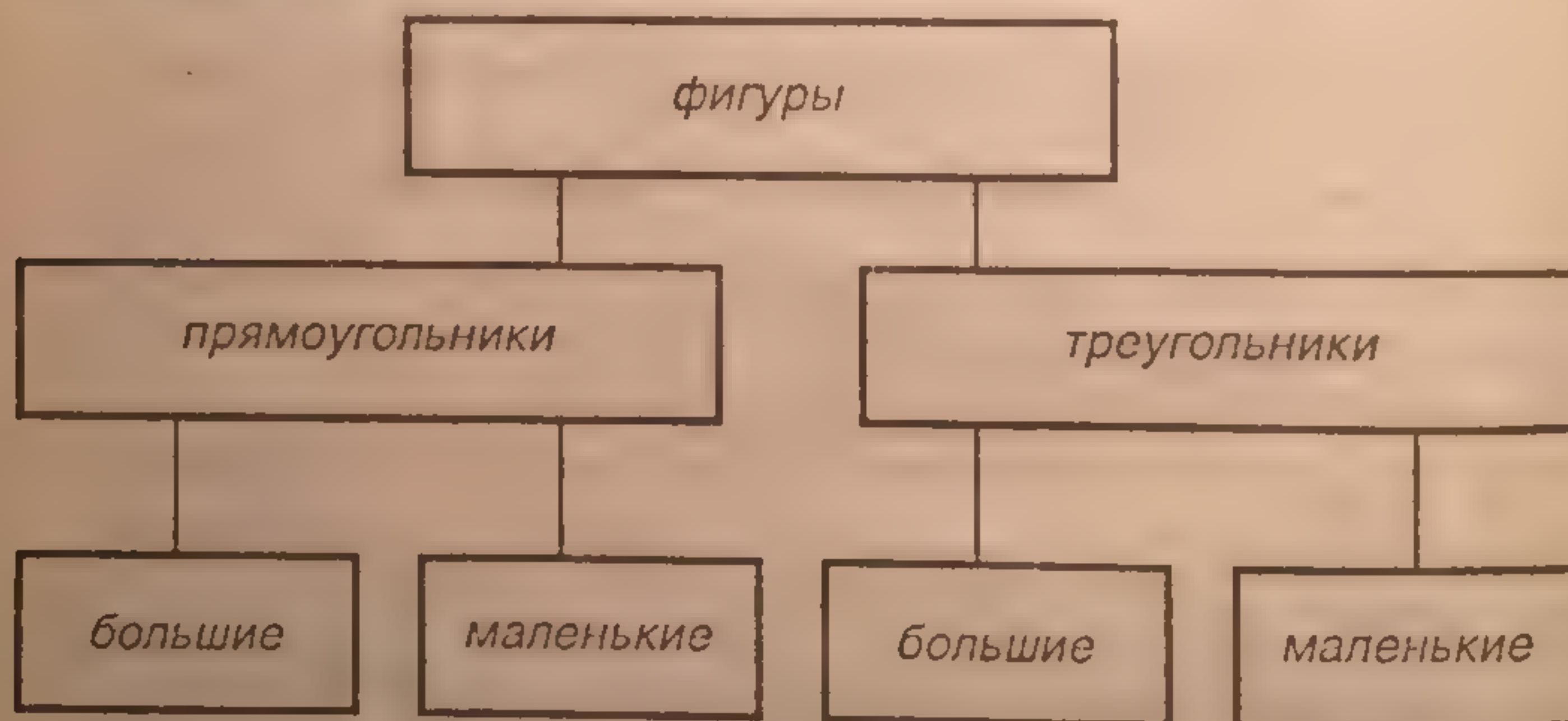
### Классификация понятий

Учитель рисует на доске различные многоугольники или заранее готовит на бумаге соответствующий рисунок (рис. 45).



Рис. 45.

Вместе с учащимися рассматривается схема классификации этих фигур:



Сначала пересчитываются фигуры подряд (6 фигур).

Вводим порядковые номера: первая, вторая, ..., шестая фигура. Потом предлагаем парные вопросы противоположной логической структуры:

1, а) Дать название третьей фигуре. (Маленький треугольник.)



1, б) На каком месте стоит большой четырехугольник?  
(На втором месте и на шестом.)

2, а) Сколько всего фигур — треугольников?

2, б) Сколько всего фигур — нетреугольников (прямоугольников?) Сколько всего фигур? Сколько же должно быть?

3, а) Сколько всего больших фигур?

3, б) Сколько всего маленьких фигур? Сколько всего фигур?

4, а) Сколько всего маленьких фигур? Сколько из них прямоугольников?

4, б) Сколько из них непрямоугольников?

Сколько всего маленьких фигур?

По мере расширения числового множества подобные задачи на классификацию фигур можно усложнять, включая, например, классификацию фигур на прямолинейные (прямоугольники и треугольники) и криволинейные (овалы и окружности).

### Употребление логических связей

Рассмотрим рисунок 46, на котором предметы расположены и в прямоугольнике и вне его и т.д. Ставим парные вопросы:

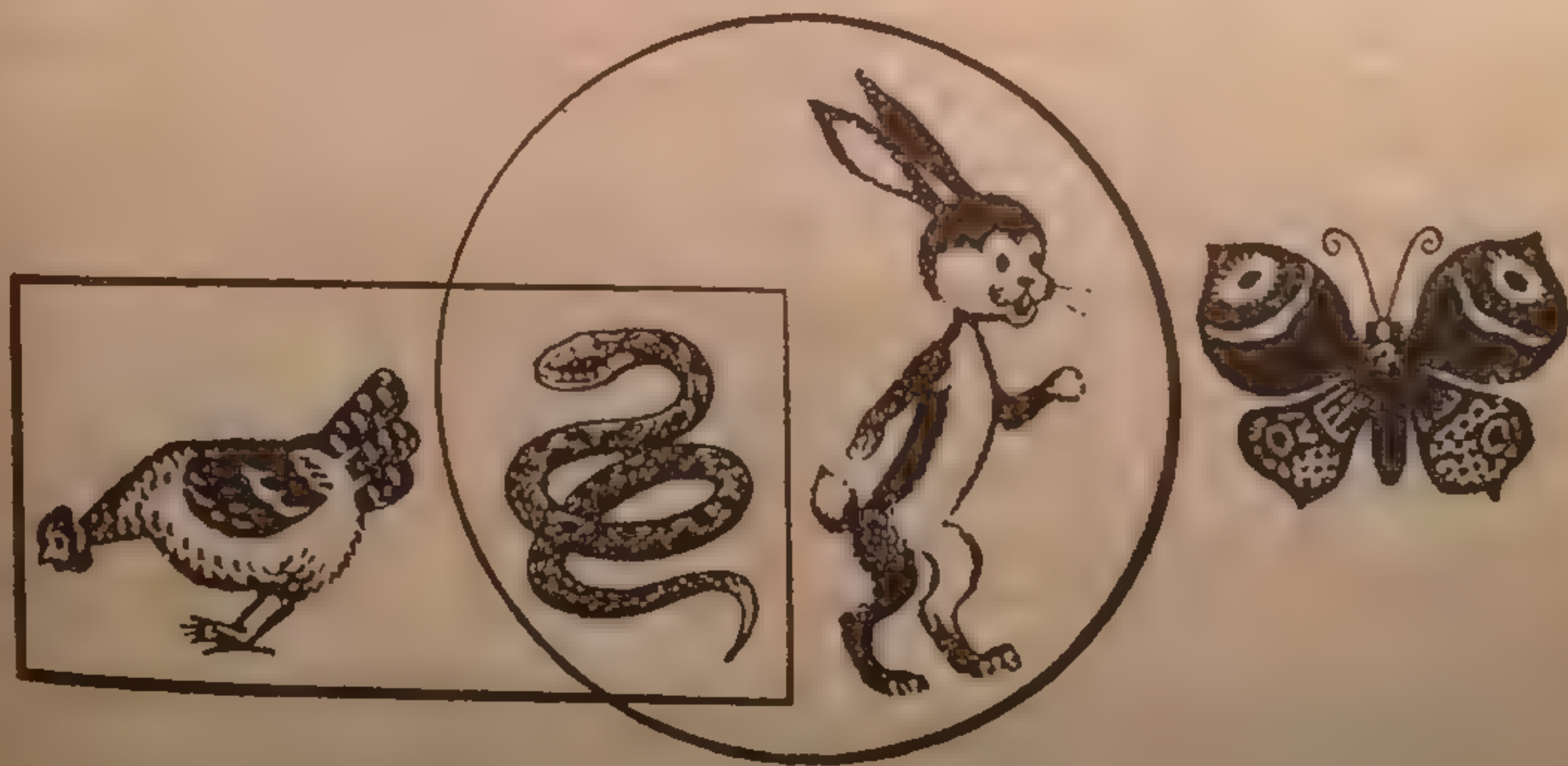


Рис. 46.



1 а) Кто находится вне окружности, но внутри прямоугольника? (Курица.)

1 б) Где находится уж? (Внутри окружности или внутри прямоугольника.)

2 а) Кто находится и в круге, и в прямоугольнике?

2 б) Кто находится ни в круге и ни в прямоугольнике? (Бабочка.)

3 а) Расскажите, где находится заяц, употребив слова: *вне* и *внутри*?

3 б) Расскажите, где находится заяц, употребив слова: *не там, где, ..., но там, где...*

Легко видеть, что подобные логические упражнения вносят в занятия игровой элемент и учат оперированию

весьма общими логическими приемами построения суждений.

Впоследствии можно усложнить рисунок, рассматривая пересечение трех замкнутых фигур (рис. 47).

Соответствующие вопросы и ответы существенно усложняются: каждый из них должен включать уже три признака, которые могут сочетаться еще более причудливо; при

этом употребляются в какой-либо комбинации три связки из следующих: *и*, *не*, *ни*, *или*, *внутри*, *вне* и т.п.

Отметим, что вопросы, которые целесообразно систематически противопоставлять, могут быть двух видов:

1) Где находится буква б?

а) Ответьте на вопрос, употребляя связки: *и*, *и*, *не*. (И в окружности, и в прямоугольнике, не в треугольнике.)

б) Ответьте на предыдущий вопрос, употребляя связку *или*. (Или внутри треугольника, или внутри прямоугольника; смысл — хотя бы внутри одной из этих фигур.)

2) Какая буква находится внутри треугольника, внутри прямоугольника, но вне окружности? (Буква е.)

3) Какие буквы находятся внутри только двух фигур, но вне третьей фигуры?

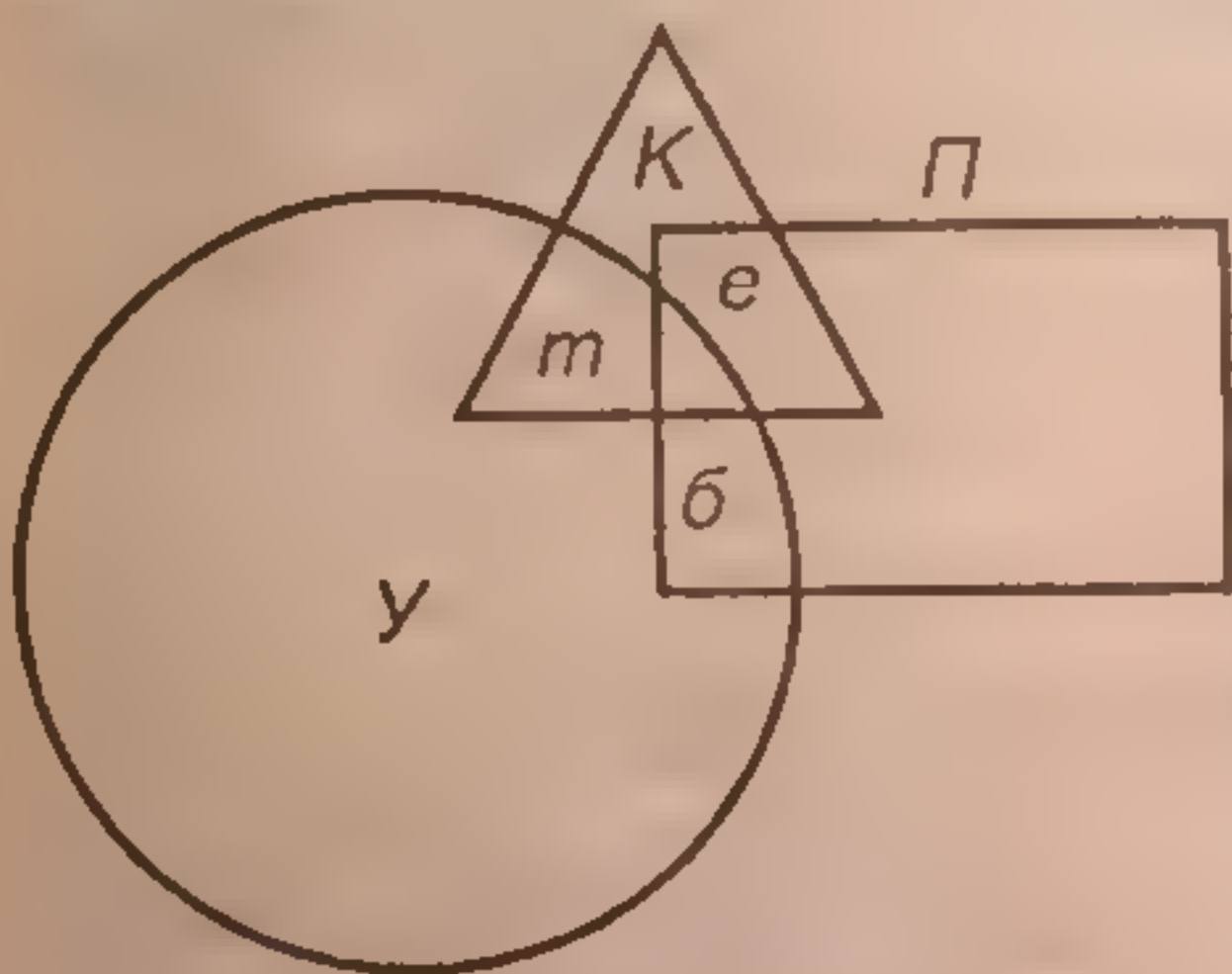


Рис. 47.



4) Какие буквы находятся вне двух фигур, но внутри третьей фигуры? И т.п.

Указанные логические упражнения могут рассматриваться с самого начала обучения; цель их — постепенная подготовка учащихся к усвоению в старших классах элементов теории множеств и математической логики.

### Задачи на дихотомию (деление на два)

Среди общих логических приемов большое значение имеет прием дихотомии, т.е. деления рассматриваемого множества предметов на два подмножества.

Рассмотрим следующую игру на отгадывание чисел.

**Задача 1.** Загадайте одно из четырех первых чисел натурального ряда (1, 2, 3, 4). Определите задуманное число с помощью не более чем двух вопросов.

**Решение.**

Пусть загадывает числа Миша, а отгадывает Петя.

**Первый способ.**

Пусть Миша задумал число 4.

Петя может применить тактику последовательного перебора чисел.

1. Петя. Ты задумал число 1?

Миша. Нет.

2. Петя. Ты задумал число 2?

Миша. Нет.

3. Петя. Ты задумал число 3?

Миша. Нет.

Теперь Петя отгадывает задуманное число.

Петя. Ты задумал число 4.

При таком решении Петя поставил три вопроса. Значит, он не выполнил условия задачи.

**Второй способ.**

Может быть задумано одно из четырех чисел, поэтому делим 4 на 2, получится 2. Ставим вопрос, используя сравнение задуманного числа с числом 2.

1. Петя. Задуманное число больше 2?

Миша. Да.



2. Петя. Задуманное число равно 3?

Миша. Нет.

Петя. Ты загадал число 4. (Второй вопрос Пети может быть и другим: Петя. Задуманное число равно 4? Миша. Да.)

При втором способе задача решена с помощью, самое большее, двух вопросов.

Задача 2. Задумайте одно из первых одиннадцати чисел натурального ряда. Определите задуманное число с помощью не более чем четырех вопросов.

Замечание. Если последовательно расспрашивать о задуманных числах, то может потребоваться до 11 вопросов; отвечающий говорит только правду.

прог  
(ал  
дл

1. Ср
- на
2. Об
- по
3. Ра
4. С
- и
5. И
6. С
7. Р
8. М
- п
9. Р
- д
- 10.
- 11.

1. С
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

- 1.
- 2.
- 3.



## Оглавление

Программа обучения по УДЕ в начальной школе (альтернативная система учебников математики для I — IV классов) . . . . .	3
--	---

### Глава I. ПЕРВЫЙ ДЕСЯТОК

1. Сравнение (противопоставление) понятий на первых уроках . . . . .	20
2. Обучение сравнению понятий по таблице (матрице) . . . . .	21
3. Работа над числовым рядом . . . . .	25
4. Совместное изучение сложения чисел и разложения числа на слагаемые . . . . .	29
5. Изучение переместительного закона сложения . . . . .	31
6. Совместное изучение сложения и вычитания . . . . .	34
7. Решение деформированных примеров . . . . .	43
8. Можно ли предлагать учащимся неверно решенные примеры? . . . . .	45
9. Решение примеров, в которых надо определить знак действия и неизвестный компонент . . . . .	49
10. Действия с нулем . . . . .	52
11. Введение понятий «равенство» и «неравенство» . . . . .	55

### Глава II. ВТОРОЙ ДЕСЯТОК

1. Совместное изучение нумерации и простейших случаев сложения и вычитания в пределах 20 . . . . .	60
2. Сложение и вычитание в пределах 20 без перехода через десяток . . . . .	63
3. Сложение и вычитание в пределах 20 с переходом через десяток . . . . .	73
4. Работа с таблицей Пифагора . . . . .	84
5. Связь между деформированными примерами и уравнениями . . . . .	85

### Глава III. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ В ПРЕДЕЛАХ 100

1. Подготовительные упражнения . . . . .	87
2. Сложение и вычитание без перехода через десяток . . . . .	92
3. Сложение и вычитание с переходом через десяток . . . . .	97



4. О возможном одновременном изучении действий в пределах 100 и тех же действий над круглыми десятками в пределах 1000 . . . . . 103
5. О работе над понятиями «равенство», «уравнение» и «неравенство» . . . . . 109

#### Глава IV. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ

1. Классификация простых задач (в одно действие) на сложение и вычитание . . . . . 115
2. Одновременное изучение задач на нахождение суммы и слагаемого . . . . . 116
3. Задачи на нахождение разности, уменьшаемого и вычитаемого . . . . . 121
4. Противопоставление задач на нахождение суммы и разности . . . . . 128
5. Одновременное изучение задач на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц. Задачи на разностное сравнение . . . . . 130
6. Задачи, в которых используется понятие «на столько-то больше», а при решении выполняется вычитание (и наоборот) (косвенные задачи) . . . . . 137
7. Выработка множественных связей при решении задач на сложение и вычитание . . . . . 140
8. Простая и составная задача . . . . . 142
9. Обратная задача к задачам в два действия . . . . . 144

#### Глава V. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ В ПРЕДЕЛАХ 100

1. О системе простых задач, рассматриваемых при изучении табличного умножения и деления . . . . . 149
2. Задачи на умножение и деление по содержанию и деление на равные части . . . . . 151
3. Изучение переместительного закона умножения . . . . . 159
4. Задачи на уменьшение и увеличение числа в несколько раз и на кратное сравнение величин . . . . . 163
5. Противопоставление задач на разностное и кратное сравнение . . . . . 169
6. Задачи, в которых используется понятие «во сколько раз больше», а при решении выполняется деление . . . . . 171
7. Составление обратных задач к задачам в два действия . . . . . 173

8. Нахождение его части  
9. Изучение составных  
10. Изучение на двузнач  
11. Изучение числа на  
12. Изучение на двузнач  
13. О возм с некото

#### ТЕС

1. Сопоста сложени
2. Изучени и резуль
3. Изменен от изме

1. О месте начальн
2. Методи к задаче
3. Задачи
4. Задачи
5. Задачи
6. Табличн

#### Глав

1. Занима
2. Занима
3. Занима
4. Занима
5. Задачи
6. Отгады
7. Задачи



8. Нахождение части числа, числа по величине его части; решение задач типа: «Какую часть составляет одно число от другого?» . . . . .	175
9. Изучение внетабличного умножения и деления. . . . .	179
10. Изучение деления двузначных чисел на двузначное без перехода через десяток. . . . .	186
11. Изучение умножения и деления двузначного числа на однозначное с переходом через десяток . . .	188
12. Изучение деления двузначного числа на двузначное с переходом через десяток . . . . .	192
13. О возможном слиянии концентр «сотня» с некоторыми вопросами концентр «тысяча» . . . . .	194

## Глава VI. ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ АРИФМЕТИКИ

1. Сопоставление переместительного закона сложения и умножения . . . . .	200
2. Изучение зависимости между компонентами и результатами действий . . . . .	202
3. Изменение суммы и произведения в зависимости от изменения слагаемого и множителя . . . . .	205

## Глава VII. ОБУЧЕНИЕ СОСТАВЛЕНИЮ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. О месте задач в курсе математики начальной школы . . . . .	211
2. Методика составления задачи, обратной к задаче в несколько действий . . . . .	213
3. Задачи в три действия . . . . .	219
4. Задачи на приведение к единице . . . . .	226
5. Задачи на движение . . . . .	231
6. Табличное изображение задач . . . . .	236

## Глава VIII. ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

1. Занимательные задачи на свойства действий. . . . .	243
2. Занимательные задачи на расстановку чисел . . . . .	245
3. Занимательные (магические) квадраты. . . . .	249
4. Занимательные числовые равенства (тождества) . . . . .	250
5. Задачи-парадоксы с неожиданными ответами . . . . .	252
6. Отгадывание чисел . . . . .	253
7. Задачи, связанные с составлением таблиц. . . . .	257



Эрдниев  
Э 75 Обучен  
для учит  
1995 - 2

В течение  
РАО, заслуж  
доктор педа  
методики м  
проводил  
процесса об

В данной  
одновременн  
понятий,  
превращения  
противопост  
подачи учебн



**Эрдниев П. М.**

**Э 75** Обучение математике в начальных классах (Книга для учителя) / 2 изд. доп. — М.: АО «СТОЛЕТИЕ», 1995 — 272 с.

В течение почти двух десятилетий автор — академик РАО, заслуженный деятель науки России и Калмыкии, доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой методики математики Калмыцкого госуниверситета — проводил исследования проблемы интенсификации процесса обучения математике.

В данной книге освещается методическая система одновременного изучения взаимно обратных действий и понятий, совместное изучение раздробления и превращения именованных чисел, использование метода противопоставления, использование удобных приемов подачи учебной информации.



**Пюрвя Мучкаевич Эрдниев**

**Обучение математике в начальных классах**

Книга для учителя

*Оформление Н. Ордынского*

2 издание (с дополнениями) издается по книге.  
Эрдниев П. М. Обучение математике в начальных  
классах / М.: «Просвещение», 1977.

По  
с

Усл.

АО "

60



ISBN 5-7459-0023-7

---

ЛР №063236 от 04.01.94

Подписано в печать с оригинал-макета 15.05.95.

Формат 84 x 108 1/32. Бумага типографская.

Гарнитура Прагматика. Печать высокая.

Усл. печ. л. 14,28. Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 2 0000 экз.

С 004. Заказ №473

---

АО "СТОЛЕТИЕ", 111141, Москва, Перовская, 39, к.1

Владимирская книжная типография

Комитета Российской Федерации по печати.

600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д.7



**Уважаемые коллеги!**  
**Издательство «СТОЛЕТИЕ»**  
**приглашает Вас к сотрудничеству**

Несколько слов о нашем издательстве.  
Оно было организовано в 1993г. Специализацией  
издательства стало издание научно-познавательной  
учебной, специальной и детской литературы

**В 1994-95 гг. выпущены следующие книги:**

- «Краткий немецко-русский и русско-немецкий словарь»
- А. Шепелев* «Как самому отремонтировать дом»
- В. Гюго* «Человек, который смеется»
- Я. Перельман* «Занимательная алгебра»
- Я. Перельман* «Занимательная арифметика»
- Я. Перельман* «Занимательная физика»
- Я. Перельман* «Занимательная геометрия»
- Я. Перельман* «Живая математика»
- Е. Игнатьев* «В царстве смекалки»
- А. Островский, Б. Кордемский* «Геометрия помогает арифметике»
- Б. Кордемский, Н. Русалев* «Удивительный квадрат»
- С. Никольский, М. Потапов* «Алгебра. Пособие для поступающих»
- С. Олехник, Ю. Нестеренко, М. Потапов* «Старинные занимательные задачи»
- О. Джежелей* «Помогайка» Книга для детей и родителей
- Н. Чуприкова* «Законы умственного развития и обучения»
- Т. Комарова* «Обучение детей технике рисования»
- М. Потапов, С. Олехник, Ю. Нестеренко* «Сборник конкурсных задач по математике для поступающих в ВУЗы»

Некоторые из этих наименований еще есть в ограниченном количестве на складе издательства

В бли  
А  
го  
«Д  
«Ч  
«З  
Ю  
Н  
«Н  
В

Выйд  
щеннь

П  
/  
П  
у  
П  
/  
П  
у  
П  
/

В ассе  
други  
нами  
(095)  
наиме  
вания

Доста  
получ  
хотел

Наш а  
кор. 5,

С уваж  
Испол  
АО «С



**В ближайших планах издательства:**

А. Волков с/с в 3-х тт. В собрание вошли мало издававшиеся повести и романы известного детского писателя:

«Два брата»,

«Царьградская пленница»,

«Чудесный шар»,

«Зодчие», «Скитания».

Ю. Пухначев, Ю. Попов «Математика без формул»

Н. Кошкин «Справочник по элементарной физике»

«Народные способы лечения болезней» / авт.-сост. Н. Мазнев /

В. Сеницын «Как почувствовать вкус слова»

Выйдут в свет также 5 книг академика П. Эрдниева, посвященные методам укрупнения дидактических единиц:

П. Эрдниев «Обучение математике в начальных классах»  
/ Книга для учителя /

П. Эрдниев «Математика 1 - 2 классы» / Книга для ученика и учителя /

П. Эрдниев «Математика 2 - 4 класс. Методика обучения  
/ Взаимно обратные действия» / Книга для учителя /

П. Эрдниев, Б. Эрдниев «Математика 5 - 6 класс» / Книга для ученика и учителя /

П. Эрдниев, Б. Эрдниев «Обучение математике в школе»  
/ Книга для учителя /

В ассортименте всегда на наших складах имеется литература других издательств. Если Вас заинтересовала предлагаемая нами литература вы можете отправить заявку по факсу: (095) 165 27 09, сообщив требуемое количество того или другого наименования (минимальная партия — 1 пачка одного наименования) и приемлемые для Вас условия оплаты.

Доставку книг издательство берет на себя. Очень бы хотелось получить от Вас информацию о том, какую литературу вы хотели бы видеть изданной в нашем издательстве.

Наш адрес: 105269, Москва, ул. В. Первомайская, д. 43/24, кор. 5, ком. 312; тел.: 165 27 09, 165 27 18.

С уважением

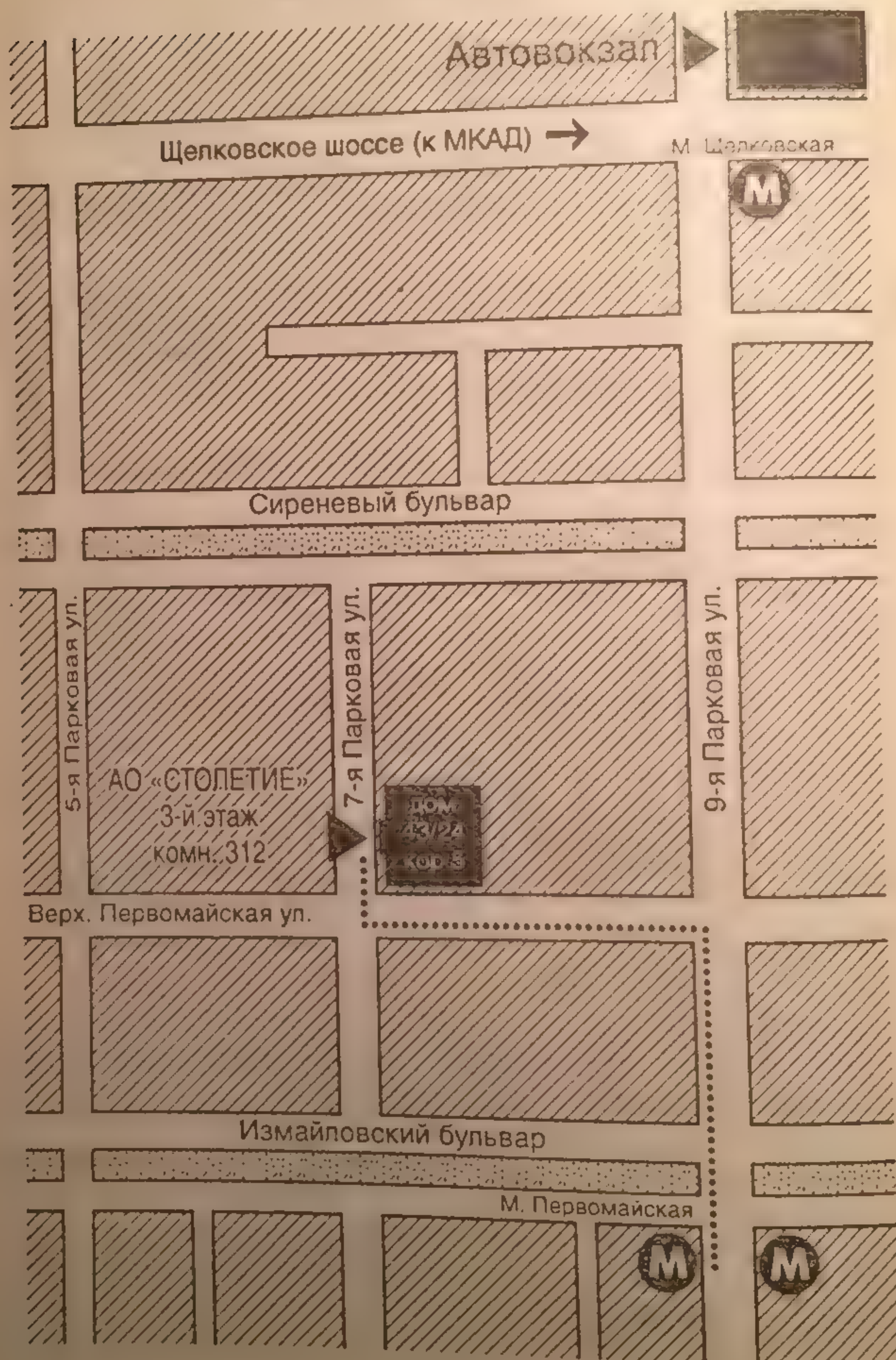
Исполнительный директор  
АО «СТОЛЕТИЕ»

Новицкий А. Л



# Транспортная схема

Наш адрес: ул. Верхняя Первомайская,  
д. 43/24, кор.5 (институт Гипрокино), комн.312  
Проезд на метро до ст. Первомайская  
Тел: 165-27-09, 165-27-18.

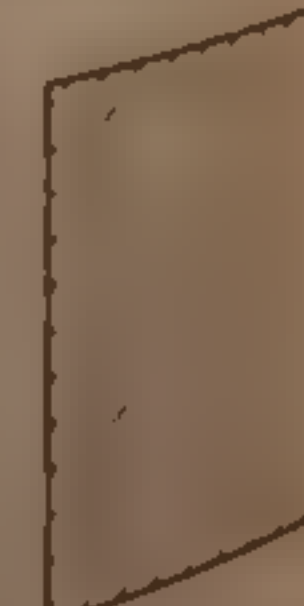
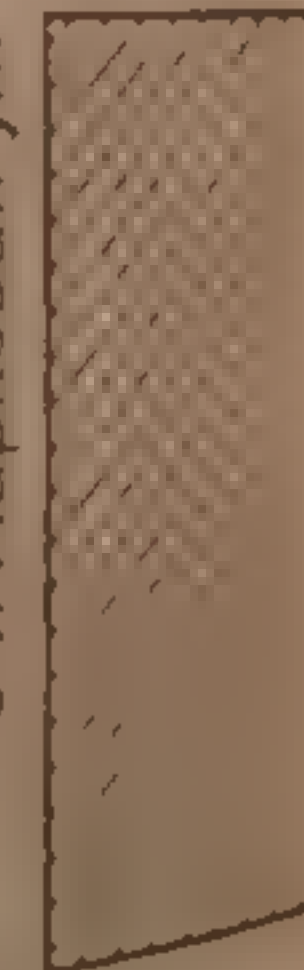
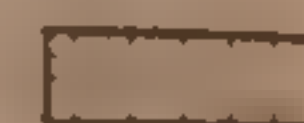
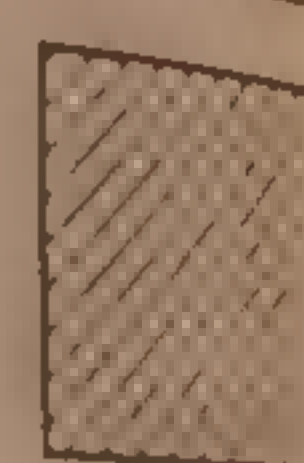
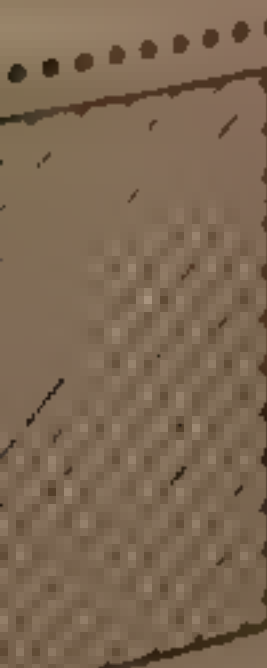
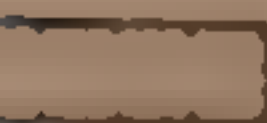




кема

КОМАНДА  
КОМАНДА  
КОМАНДА

кема

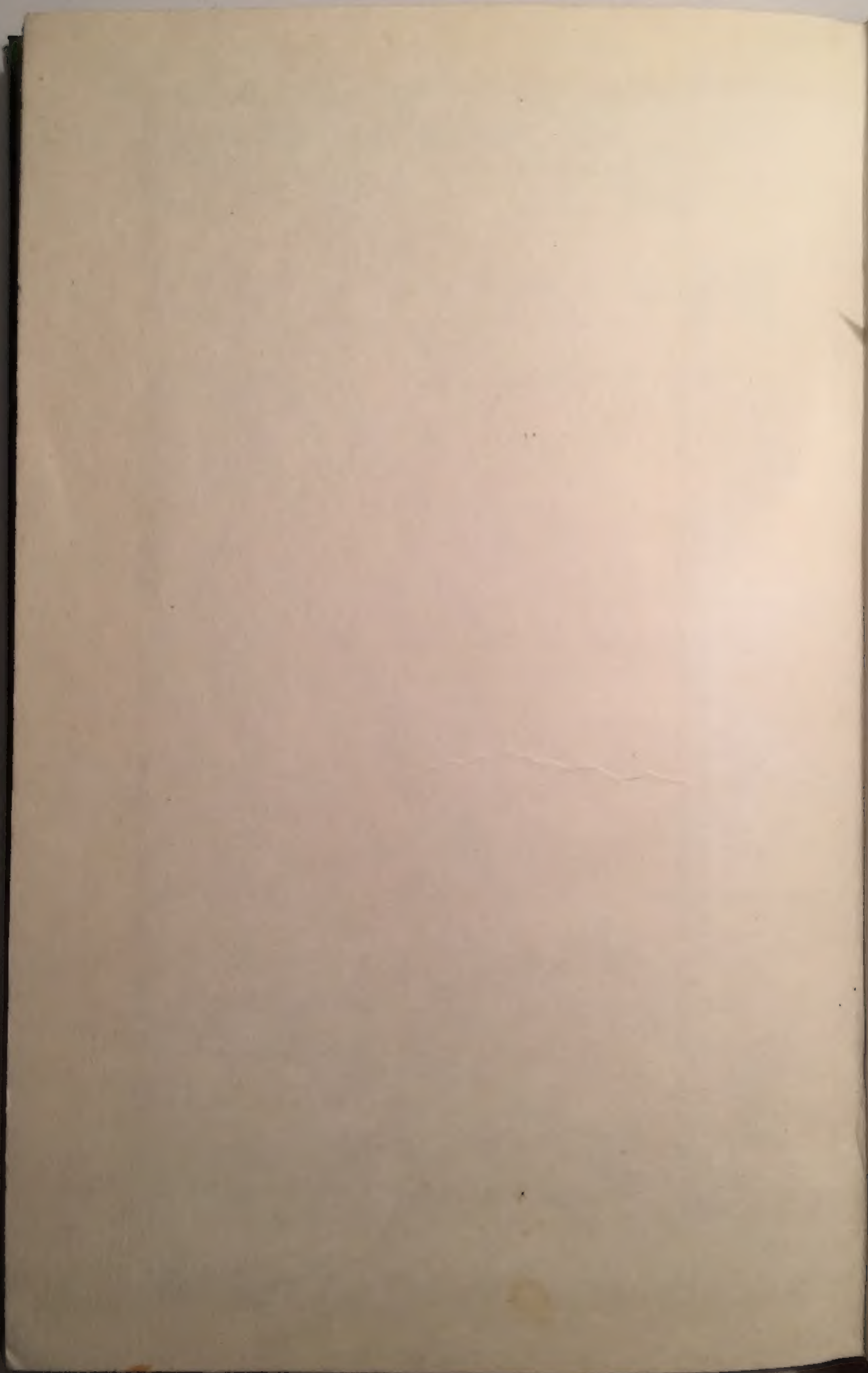


9-я Парковая ул.

КОМАНДА









# ЗАВАРНОЙ ХЛЕБ С СОЛОДОМ 820ГР

Изготовитель: ООО Ашан Москва п. Сосенское,  
Калужское шоссе, 21 км, ТЦ 'МЕГА'

Состав: мука пшеничная в/с, мука ржаная, вода  
питьевая, солод

дрожжи прессованные, Соль поваренная пище  
(Полевсье) агент антислеживающий E536

Продукт может содержать следы кунжута, люпина,  
соя, яичных прод., молоч. прод. миндаля, злаков, сидер,  
глютен, других аллерг. (арахис, горчица, орехи,  
сельдерей) и продуктов их переработки.

В 100 грамм продукта: белков-6,6г., жиров-1г  
углеводов-45,6 г.

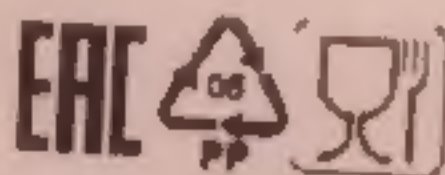
Энергетическая ценность в 100 г продукта:  
217,3ккал 910кДж.

Хранить при температуре:  $(18 \pm 2^\circ \text{C})$  и  
относительной влажности воздуха не менее 75%.

Изготовлено по СТО 9115-003-57041869-014-2018

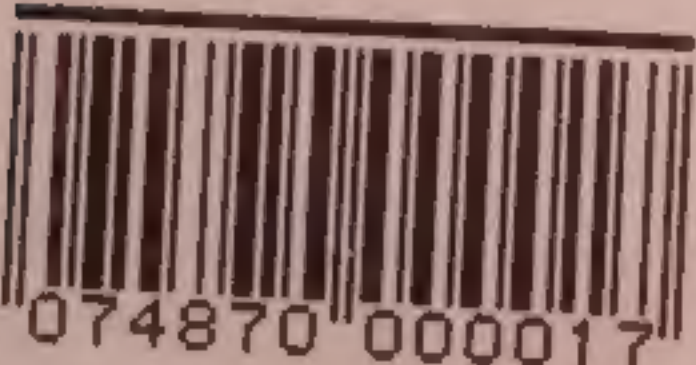
Срок годности упакованных изделий: 72 часа

ИЗГОТОВЛЕН  
И УПАКОВАН: 26.10.22 12:49  
ГОДЕН ДО: 29.10.22 12:49



РУБ/ШТ: КОП-ВО, ШТ

1



2 074870 000017

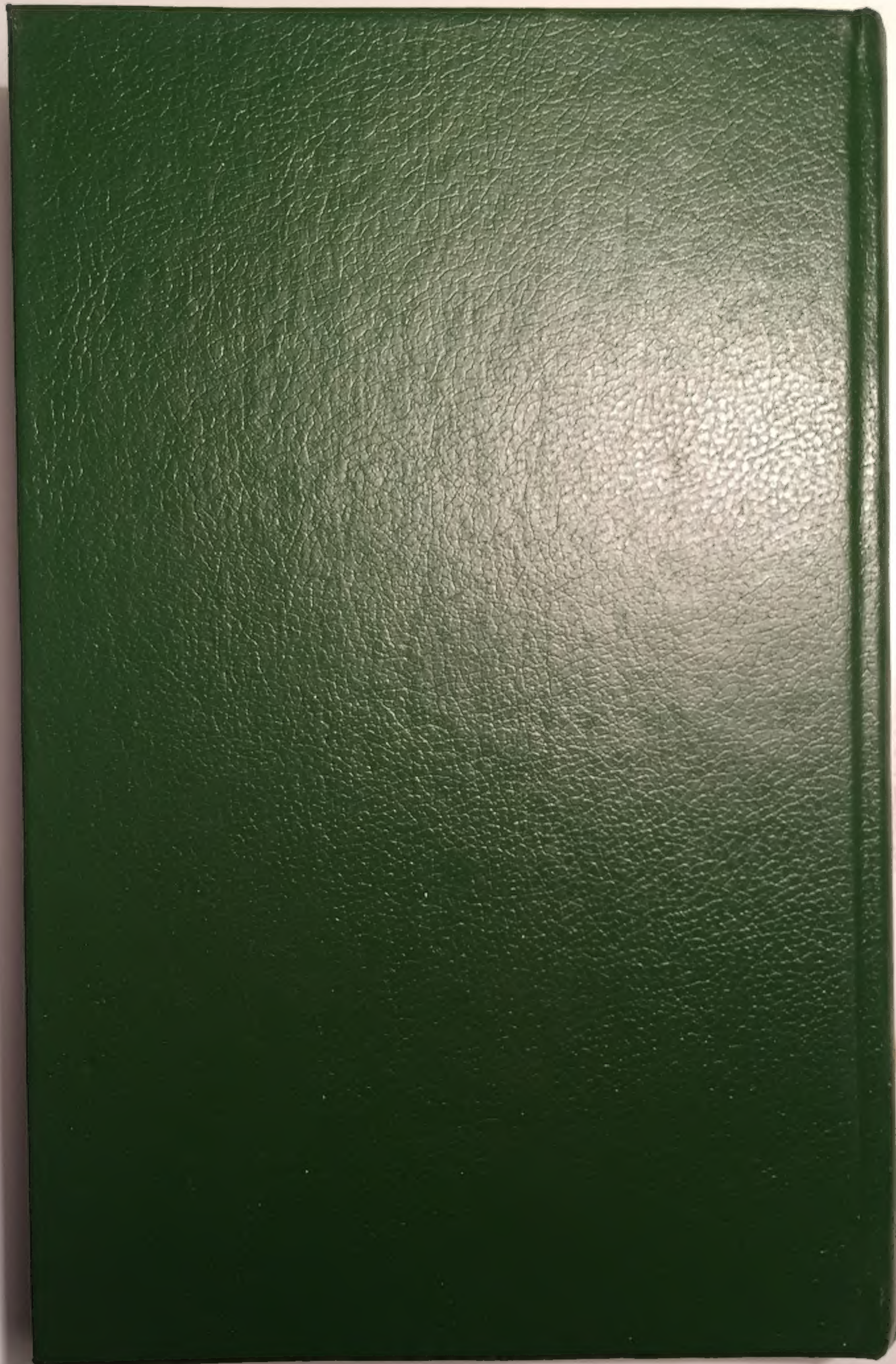
74870

52.90 RUB

ООО АШАН

а: МО г. Мытищи Осташковское ш. 1  
а: Калужское ш. 21 км, ТЦ МЕГА









МАТЕМАТИКА  
В НАУЧНЫХ  
ЖУРНАЛАХ

П.М.ЭРДУХИМОВ